

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/3/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 23/4/2012

Άσκηση 1. Η εφαρμογή μίας βάσης δεδομένων σε ένα υπολογιστικό νέφος προσπελαύνεται κατά μέσο όρο από 15 πελάτες ανά λεπτό. Μοντελοποιούμε τις προσβάσεις σύμφωνα με μία Poisson στοχαστική διαδικασία. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι κατά τη διάρκεια ενός λεπτού, 3 πελάτες προσπελαύνουν την εφαρμογή τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα και 2 πελάτες προσπελαύνουν την εφαρμογή τα τελευταία 15 δευτερόλεπτα.

Άσκηση 2. Θεωρήστε μία Poisson στοχαστική διαδικασία με ρυθμό $\lambda > 0$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε ακριβώς μία άφιξη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$ και $(2, 3]$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(0, 2]$ και 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 3]$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 2]$ δεδομένου ότι έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(0, 2]$ και 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 3]$.

Άσκηση 3. Δύο ειδών σωματίδια φτάνουν σε έναν ανιχνευτή. Αυτά που φτάνουν είναι τύπου A με πιθανότητα p_A και τύπου B με πιθανότητα $p_B = 1 - p_A$. Ένα σωματίδιο τύπου A καταγράφεται (δηλαδή ανιχνεύεται και προσμετράται) από τον ανιχνευτή με πιθανότητα α . Τα σωματίδια τύπου B δεν καταγράφονται από τον ανιχνευτή.

(α) Σε ένα πλήθος 100 αφίξεων σωματιδίων, ποιος είναι ο μέσος αριθμός σωματιδίων που καταγράφονται από τον ανιχνευτή;

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. K , του πλήθους των σωματιδίων που φτάνουν στον ανιχνευτή από την αρχή της παρατήρησης (χρόνος $t = 0$) έως και την άφιξη του πρώτου σωματιδίου που καταγράφεται από τον ανιχνευτή.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. L , του πλήθους των σωματιδίων που φτάνουν στον ανιχνευτή από την αρχή της παρατήρησης (χρόνος $t = 0$) έως και την άφιξη του τρίτου σωματιδίου που καταγράφεται από τον ανιχνευτή.

Για τη συνέχεια του προβλήματος, υποθέτουμε ότι η συνολική στοχαστική διαδικασία των αφίξεων και των δύο τύπων σωματιδίων, A και B, είναι Poisson με ένταση 2 σωματίδια ανά δευτερόλεπτο.

Έστω $N(t)$ ο αριθμός των σωματιδίων που φτάνουν στον ανιχνευτή στο διάστημα $[0, t]$ sec. Με $R(t)$ συμβολίζουμε την ένδειξη του μετρητή του ανιχνευτή η οποία αρχίζει με την τιμή 0 σε χρόνο $t = 0$ και αυξάνεται κατά 1 κάθε φορά που καταγράφεται ένα νέο σωματίδιο.

(δ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $M = N(60) - N(30)$.

(ε) Καταγράφουμε την ένδειξη του μετρητή κάθε T δευτερόλεπτα, οπότε δημιουργούμε ένα αρχείο με τις τιμές $R(iT)$ για $i = 0, 1, 2, \dots$. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της $R(iT)$. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών καταχωρήσεων, $R((k+1)T) - R(kT)$;

(στ) Χρησιμοποιώντας το ΚΟΘ, υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $R(iT)$ για μεγάλα i , εκφράζοντάς την συναρτήσει της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Άσκηση 4. Δύο ειδών μεταφορικά μέσα πηγαίνουν από την πλατεία Ελευθερίας στην Κνωσό: ταξί και λεωφορεία. Οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων διαδοχικών ταξί είναι εκθετικά κατανεμημένες ανεξάρτητες τ.μ. με παράμετρο λ_1 , ενώ οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων διαδοχικών λεωφορείων είναι εκθετικά κατανεμημένες ανεξάρτητες τ.μ. με παράμετρο λ_2 . Έστω ότι η Σοφία και η Τζέσικα φτάνουν στην πλατεία Ελευθερίας στις 7:00 το πρωί.

(α) Ποιο είναι το μέσο χρονικό διάστημα μέχρι να δουν το πρώτο όχημα;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο όχημα που βλέπουν να είναι ταξί και ποια η πιθανότητα να είναι λεωφορείο;

Με ταξί, η διάρκεια της διαδρομής (έστω σε λεπτά της ώρας) από την πλατεία Ελευθερίας μέχρι την Κνωσό είναι εκθετικά κατανεμημένη τ.μ. με παράμετρο μ_1 , ενώ με λεωφορείο η αντίστοιχη διάρκεια είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο μ_2 . Υποθέτουμε ανεξαρτησία όλων των τ.μ.

(γ) Οι δύο φίλες μπαίνουν στο πρώτο όχημα που περνά και φτάνουν στην Κνωσό μετά από X λεπτά. Υπολογίστε τη ροπογενήτρια συνάρτηση της τ.μ. X . (Βοήθεια: Εκφράστε την τ.μ. X ως το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τ.μ.)

(δ) Έστω ότι ένα ταξί και ένα λεωφορείο περνούν ταυτόχρονα από την πλατεία. Η Σοφία μπαίνει στο ταξί και η Τζέσικα στο λεωφορείο. Έστω Y ο χρόνος από την αναχώρησή τους έως τη στιγμή που συναντιούνται και πάλι στην Κνωσό. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Y .

Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο ειδών λεωφορεία, τα express και τα κανονικά. Ένα τυχαίο λεωφορείο που φτάνει στην πλατεία είναι express με πιθανότητα p και κανονικό με πιθανότητα $1-p$.

(ε) Αν οι φίλες κάθονται στην πλατεία για l λεπτά της ώρας, πόσα express λεωφορεία θα δούν να περνούν κατά μέσο όρο;

(στ) Αν συνεχίσουν να πίνουν τον καφέ τους επ' άπειρον, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δουν k express λεωφορεία πριν δουν k κανονικά;