

**ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2012**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/03/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 23/04/2012

**Άσκηση 1.**

Προφανώς, το πλήθος των πελατών  $N(t_1, t_2]$  οι οποίοι προσπελαύνουν την εφαρμογή στη διάρκεια  $t_2 - t_1$  δευτερολέπτων ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $\frac{15}{60}(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)/4$ . Η πιθανότητα που μας ζητείται είναι:

$$\begin{aligned} P(N(0, 10] = 3, N(45, 60] = 2) &= P(N(0, 10] = 3) \cdot P(N(45, 60] = 2) \quad (\text{ανεξάρτητα γεγονότα}) \\ &= \frac{(10/4)^3 e^{-10/4}}{3!} \cdot \frac{(15/4)^2 e^{-15/4}}{2!} = 0.0353. \end{aligned}$$

**Άσκηση 2.**

(α) Τα χρονικά διαστήματα  $(0, 1]$ ,  $(1, 2]$  και  $(2, 3]$  είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν την ίδια διάρκεια, ίση με 1 μονάδα χρόνου. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $(\lambda e^{-\lambda})^3 = \lambda^3 e^{-3\lambda}$ .

(β) Έστω  $N(t_1, t_2]$  το πλήθος των αφίξεων στο χρονικό διάστημα  $(t_1, t_2]$ . Τότε  $N(t_1, t_2] \sim \text{Poisson}(\lambda(t_2 - t_1))$ . Ζητούμε την πιθανότητα του γεγονότος  $A = \{N(0, 2] = 2, N(1, 3] = 2\}$ . Παρατηρούμε ότι το  $A$  είναι η ένωση των ξένων μεταξύ τους γεγονότων  $B_{020}$ ,  $B_{111}$  και  $B_{202}$ , όπου

$$B_{ijk} = \{N(0, 1] = i, N(1, 2] = j, N(2, 3] = k\}.$$

Καθώς τα  $\{N(0, 1] = i\}$ ,  $\{N(1, 2] = j\}$  και  $\{N(2, 3] = k\}$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_{020}) + P(B_{111}) + P(B_{202}) \\ &= e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right) e^{-\lambda} + (\lambda e^{-\lambda})^3 + \left( \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right) e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right) \\ &= \left( \frac{\lambda^2}{2} + \lambda^3 + \frac{\lambda^4}{4} \right) e^{-3\lambda}. \end{aligned}$$

(γ) Εδώ ζητούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα:

$$P(\{N(1, 2] = 2\} | A) = \frac{P(\{N(1, 2] = 2\} \cap A)}{P(A)}.$$

Αλλά,  $\{N(1, 2] = 2\} \cap A = B_{020}$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} P(\{N(1, 2] = 2\} | A) &= \frac{P(B_{020})}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right) e^{-\lambda}}{\left( \frac{\lambda^2}{2} + \lambda^3 + \frac{\lambda^4}{4} \right) e^{-3\lambda}} \\ &= \frac{\frac{\lambda^2}{2}}{\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^3 + \frac{\lambda^4}{4}} \\ &= \frac{2}{2 + 4\lambda + \lambda^2}. \end{aligned}$$

**Άσκηση 3.**

(α) Τα σωματίδια που καταγράφονται από τον ανιχνευτή είναι τύπου A και σχηματίζουν μια  $\sigma.$ δ. Bernoulli με παράμετρο  $p_{Aa}$ . Συνεπώς ο αριθμός των σωματιδίων που καταγράφονται σε ένα πλήθος 100 αφίξεων ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n = 100$  και  $p = p_{Aa}$ . Επομένως, ο μέσος αριθμός των σωματιδίων που καταγράφονται είναι  $np = 100p_{Aa}$ .

(β) Η τυχαία μεταβλητή K ισοδυναμεί με το πλήθος των προσπαθειών έως την 1η επιτυχία σε μια  $\sigma.$ δ. Bernoulli με παράμετρο  $p_{Aa}$ . Επομένως η τυχαία μεταβλητή K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή:

$$p_K(k) = (1 - p_{Aa})^{k-1} p_{Aa} ; k = 1, 2, 3, \dots$$

(γ) Η τυχαία μεταβλητή L ισοδυναμεί με το πλήθος των δοκιμών έως την 3η επιτυχία σε μια  $\sigma.$ δ. Bernoulli με παράμετρο  $p_{Aa}$ . Επομένως η τ.μ. L ακολουθεί κατανομή Pascal τάξης 3:

$$p_L(l) = \binom{l-1}{2} (p_{Aa})^3 (1 - p_{Aa})^{l-3} ; l = 3, 4, 5, 6, \dots$$

(δ) Προφανώς, η τ.μ.  $N(t)$  ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $2t$ . Η τ.μ.  $M$  είναι το πλήθος των σωματιδίων που φτάνουν στο διάστημα  $[30 \ 60] \text{ sec}$ . Λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης της  $\sigma.$ δ. Poisson, η  $M$  ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $2(60 - 30) = 60$ :

$$p_M(m) = \frac{60^m}{m!} e^{-60} ; m = 0, 1, 2, \dots$$

(ε) Η  $\sigma.$ δ. που σχετίζεται με την  $R(t)$  αφορά τις αφίξεις σωματιδίων τύπου A που καταγράφονται από τον ανιχνευτή. Αυτή είναι μια  $\sigma.$ δ. Poisson με ένταση  $p_{Aa}$  σωματίδια/σεκ. Συνεπώς η  $R(t)$  ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $2p_{Aa}t$ :

Επομένως:

$$E[R(iT)] = 2p_{Aa}iT = \text{var}(R(iT))$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης: } E[R((k+1)T) - R(kT)] &= 2p_{Aa}(k+1)T - 2p_{Aa}kT \\ &= 2p_{Aa}T \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned} \text{var}(R((k+1)T) - R(kT)) &= \text{var}(\text{πλήθος καταγραφών σε χρόνο } T) \\ &= 2p_{Aa}T \end{aligned}$$

(στ) Η τ.μ.  $R(iT)$  μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα  $i$  το πλήθος ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τ.μ. Poisson με παράμετρο  $2p_{Aa}T$ :

$$R(iT) = \sum_{k=1}^i [R(kT) - R((k-1)T)]$$

Με άμεση εφαρμογή του ΚΟΘ έχουμε ότι:

$$F_{R(iT)}(r) \approx \Phi\left(\frac{r - i2p_{Aa}T}{\sqrt{2p_{Aa}Ti}}\right).$$

**Άσκηση 4.**

(α) Η συνολική  $\sigma.$ δ. αφίξεων όλων των οχημάτων είναι Poisson με ένταση  $\lambda_1 + \lambda_2$ . Συνεπώς το μέσο χρονικό διάστημα μέχρι την άφιξη του πρώτου οχήματος είναι  $\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ .

(β) Από τις ιδιότητες των συγχωνευμένων  $\sigma.$ δ. Poisson έχουμε ότι:

$$P(\text{πρώτο όχημα είναι ταξί}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Και

$$P(\text{πρώτο όχημα είναι λεωφορείο}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

(γ) Έχουμε  $X = W + D$ , όπου  $W$  είναι ο χρόνος έως την άφιξη του πρώτου οχήματος και  $D$  είναι η διάρκεια της διαδρομής από την πλατεία Ελευθερίας στην Κνωσσό. Προφανώς  $W \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$  οπότε  $M_W(s) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - s}$ . Για την τ.μ.  $D$  έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} M_D(s) &= E[e^{sD}] = E[e^{sD} \mid \text{όχημα είναι ταξί}] \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &+ E[e^{sD} \mid \text{όχημα είναι λεωφορείο}] \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

αφού η διάρκεια της διαδρομής  $D$  δεδομένου ότι το μέσο είναι το ταξί (λεωφορείο) είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο  $\mu_1$  ( $\mu_2$ ).

Καθώς οι  $W$  και  $D$  είναι ανεξάρτητες, έχουμε ότι:

$$M_X(s) = M_W(s) M_D(s) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - s} \left( \frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

(δ) Έστω  $D_T$  η διάρκεια διαδρομής με ταξί και  $D_B$  η διάρκεια διαδρομής με το λεωφορείο. Τότε  $Y = \max(D_T, D_B)$ . Επίσης μπορούμε να εκφράσουμε την  $Y$  ως  $Y = Y_1 + Y_2$  όπου  $Y_1$  είναι ο χρόνος έως την άφιξη του πρώτου οχήματος στην Κνωσσό,  $Y_2$  είναι χρόνος από την άφιξη του πρώτου οχήματος έως την άφιξη του δεύτερου οχήματος στην Κνωσσό.

Έχουμε ότι  $Y_1$  είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης σε  $\sigma.$ δ. Poisson έντασης  $\mu_1 + \mu_2$ .

Επομένως,  $E[Y_1] = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}$  Επίσης,

$$\begin{aligned} E[Y_2] &= E[Y_2 \mid D_T < D_B] P(D_T < D_B) + E[Y_2 \mid D_T \geq D_B] P(D_T \geq D_B) \\ &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως, } E[Y] = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left[ 1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right]$$

(ε) Express λεωφορεία περνούν σύμφωνα με μια  $\sigma.$ δ. Poisson έντασης  $p\lambda_2$ . Συνεπώς ο μέσος αριθμός αφίξεων express λεωφορείων σε  $l$  λεπτά είναι  $lpl_2$ .

(στ) Το γεγονός είναι ισοδύναμο με το γεγονός να δουν  $k$  ή περισσότερα express λεωφορεία στα πρώτα  $2k - 1$  λεωφορεία:

$$P_r = \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i (1-p)^{2k-1-i}$$