

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/5/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 28/5/2012

Άσκηση 1. Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με επτά καταστάσεις έχει τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0.5, & (i, j) = (3, 2), (3, 4), (5, 6), (5, 7) \\ 1, & (i, j) = (1, 3), (2, 1), (4, 5), (6, 7), (7, 5) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω X_k η κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας τη χρονική στιγμή k .

(α) Δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

(β) Για ποιες τιμές του n έχουμε θετικές πιθανότητες μετάβασης n -στής τάξης από την κατάσταση 1 στην 5, $r_{15}(n) = P(X_n = 5 / X_0 = 1) > 0$;

(γ) Βρείτε το σύνολο $A(i)$ των καταστάσεων που είναι προσιτές από την κατάσταση i για κάθε $i = 1, 2, \dots, 7$.

(δ) Βρείτε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση, αποφασίστε αν είναι περιοδική (και με ποια περίοδο) ή απεριοδική.

(ε) Ποιος ο ελάχιστος αριθμός μεταβάσεων με μη μηδενική πιθανότητα που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα ώστε και οι επτά καταστάσεις να αποτελούν μία μοναδική κλάση επικοινωνίας;

Άσκηση 2. Θεωρείστε την αλυσίδα Μαρκο η οποία περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

(α) Ποιες είναι οι μεταβατικές, έμμονες και περιοδικές καταστάσεις της αλυσίδας;

(β) Ποιες είναι οι κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας;

(γ) Υπολογίστε τις $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{41}(n)$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{66}(n)$.

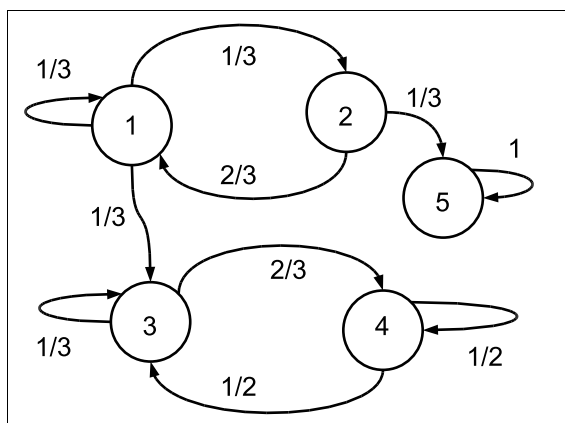
Άσκηση 3. Στο γκαράζ του Πανεπιστημίου έχει εγκατασταθεί μία μπάρα η οποία λειτουργεί με κάρτες και δυστυχώς κινδυνεύει από το προσωπικό και τους καθηγητές. Συγκεκριμένα κάθε μέρα ένα αυτοκίνητο προσκρούει στην μπάρα με πιθανότητα p και στην περίπτωση αυτή μία καινούρια μπάρα πρέπει να εγκατασταθεί. Επίσης, μία μπάρα η οποία λειτουργεί για m μέρες αντικαθίσταται από μία νέα για λόγους καλής λειτουργίας.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως τη λειτουργία του συστήματος της μπάρας του γκαράζ. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

(β) Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.

(γ) Σε βάθος χρόνου (μακροπρόθεσμα), ποια είναι η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα; Με τι ισούται αυτή η συχνότητα όταν η διάρκεια m της φυσικής ζωής της μπάρας είναι πολύ μεγάλη;

Άσκηση 4. Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή αλυσίδα για την Άσκηση 4.

(α) Ποιες είναι οι έμμονες και μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας; Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και αν είναι περιοδικές ή όχι.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_1 = 2, X_2 = 5 \mid X_0 = 1)$.

(γ) Υπάρχουν οι οριακές (στατικές) πιθανότητες δεδομένου ότι η αλυσίδα αρχίζει στην κατάσταση 3 ($X_0 = 3$); Ποιες είναι αυτές;

(δ) Δεδομένου ότι η αλυσίδα αρχίζει στην κατάσταση 3, ποια είναι η πιθανότητα ότι η n -στή μετάβαση θα είναι μία αυτο-μετάβαση (μετάβαση στην ίδια κατάσταση); Υποθέστε ότι το n είναι πολύ μεγάλο.

Ορίζουμε το χρόνο T ως το πρώτο n για το οποίο ισχύει ότι $X_n \in \{3, 4, 5\}$.

(ε) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. T δεδομένου ότι $X_0 = 1$.

(στ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_T = 5 \mid X_0 = 1)$.

(ζ) Όσο η κατάσταση του συστήματος είναι η 1 ή η 2, λαμβάνουμε τόσα ευρώ όσα η τωρινή κατάσταση. Έστω v_i το αναμενόμενο ποσό που λαμβάνουμε όταν η αρχική κατάσταση είναι η i ($i = 1, 2$). Γράψτε το σύστημα των εξισώσεων που θα σας επιτρέψουν να υπολογίσετε τα v_1 και v_2 . Ποιο είναι το μέσο κέρδος σας για κάθε μία από τις αρχικές καταστάσεις 1 και 2;