

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

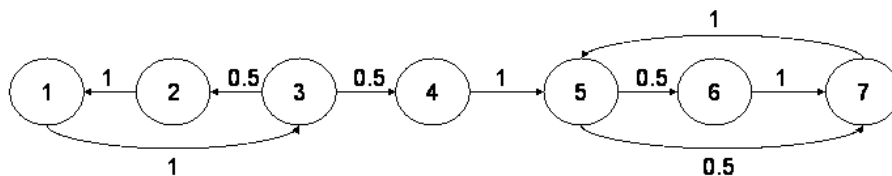
Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/05/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 28/05/2012

Άσκηση 1.

(α) Το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το εξής:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1.

(β) Από την κατάσταση 1 περνάμε στη κατάσταση 5 μέσω τουλάχιστον τριών μεταβάσεων. Τα μονοπάτια από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5 επίσης περικλείουν μονοπάτια με ανακύκλωση από την κατάσταση 1 πίσω στην 1 (μεγέθους 3) ή/και μονοπάτια με ανακύκλωση από την κατάσταση 5 πίσω στην 5 μέσω της κατάστασης 7 (είτε μεγέθους 2 ή μεγέθους 3). Επομένως, τα δυνατά μεγέθη μονοπατιών είναι: $3 + 2m + 3n$, για $m, n \geq 0$. Άρα, $r_{15}(n) > 0$ για $n = 3$ ή $n \geq 5$.

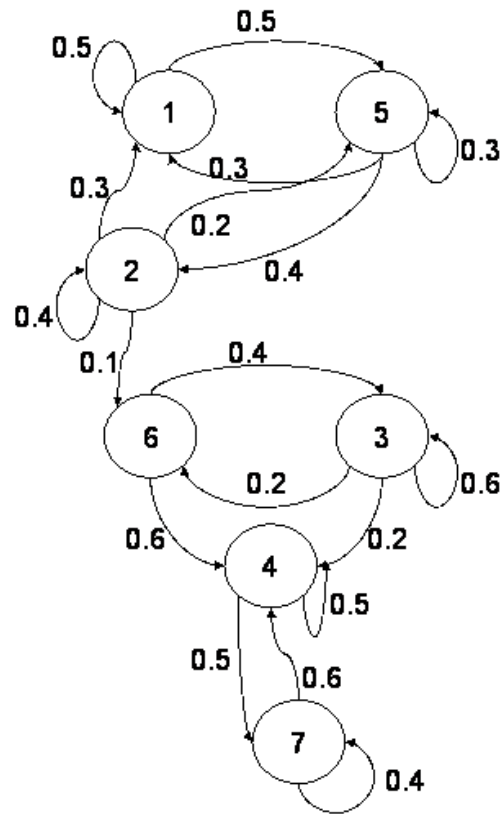
(γ) Από τις καταστάσεις 1, 2 και 3 μπορούμε να μεταβούμε σε όλες τις άλλες καταστάσεις διότι υπάρχει ένα μονοπάτι μη μηδενικής πιθανότητας από αυτές τις καταστάσεις μέσω της κατάστασης 3 σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Από τις καταστάσεις 4, 5, 6 και 7 υπάρχουν μόνο μονοπάτια προς τις καταστάσεις 5, 6 και 7.

(δ) Οι καταστάσεις 5 – 7 είναι έμμονες διότι λόγω της λογικής της απάντησης στο (γ) ερώτημα, μπορούμε να φθάσουμε σε αυτές από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Οι καταστάσεις 1 – 4 είναι μεταβατικές διότι μόλις το σύστημα μεταβεί σε καταστάσεις μετά από την κατάσταση 4 δεν μπορεί να επιστρέψει σε κάποια άλλη κατάσταση εκτός από τις καταστάσεις 5, 6 και 7. Οι καταστάσεις 5, 6 και 7 σχηματίζουν μια κλάση επικοινωνίας. Επειδή μπορεί να διασχιστεί από την κατάσταση 5 πίσω στην 5 σε 2 ή 3 βήματα, το σύστημα μπορεί να επιστρέψει στην κατάσταση 5 έπειτα από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 2$. Επομένως, το σύστημα είναι απεριοδικό.

(ε) Μια μετάβαση πρέπει να προστεθεί για την δημιουργία μιας μοναδικής κλάσης επικοινωνίας: για παράδειγμα, προσθέτοντας μια μετάβαση από την κατάσταση 5 στην κατάσταση 1 θα επιτρέπαμε την μετάβαση σε κάθε κατάσταση από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Οποιαδήποτε μετάβαση από την κλάση επικοινωνίας των καταστάσεων 5, 6 και 7 σε οποιαδήποτε από τις καταστάσεις 1, 2 ή 3 θα πετύχαινε τον ίδιο στόχο.

Άσκηση 2.

Έστω $i, i = 1, \dots, 7$ να δηλώνει τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Από την γραφική αναπαράσταση του πίνακα μετάβασης μπορεί εύκολα να αντιληφθεί κανείς τα εξής:



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 2.

(α) Οι $\{4, 7\}$ είναι έμμονες και οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές.

(β) Υπάρχει μόνο μια κλάση επικοινωνίας που σχηματίζεται από τις καταστάσεις $\{4, 7\}$.

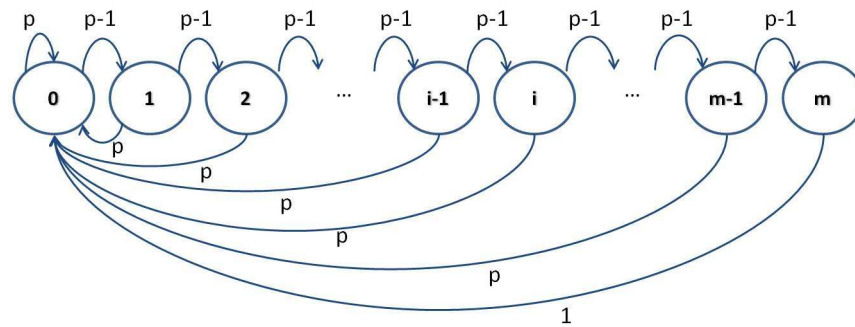
(γ) Εφόσον δεν μπορούμε να μεταβούμε στην κατάσταση 1 από την 4, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{41}(n) = 0$. Εφόσον η 6 είναι μεταβατική κατάσταση, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{66}(n) = 0$.

Άσκηση 3.

(α) Ορίζουμε $m + 1$ καταστάσεις $\{0, 1, 2, \dots, m - 1, m\}$ ως εξής:

Κατάσταση i : "Η μπάρα βρίσκεται σε λειτουργία για i μέρες" $i = 0, 1, \dots, m$.

Το γράφημα της αλυσίδας είναι:



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(β) Εξισώσεις ισορροπίας: $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$ όπου $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m]$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p + \pi_1 p + \dots + \pi_{m-1} p + \pi_m \\ \pi_1 &= \pi_0 (1-p) \\ \pi_2 &= \pi_1 (1-p) = \pi_0 (1-p)^2 \\ \pi_3 &= \pi_2 (1-p) = \pi_0 (1-p)^3 \\ &\vdots \\ \pi_i &= \pi_{i-1} (1-p) = \pi_0 (1-p)^i; \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_m = \pi_0 + \pi_0 (1-p) + \dots + \pi_0 (1-p)^m \\ &= \pi_0 \sum_{i=0}^m (1-p)^i = \pi_0 \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{1 - (1-p)} \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}} \\ \pi_i &= \frac{p(1-p)^i}{1 - (1-p)^{m+1}}; \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

(γ) Μακροπρόθεσμα, η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα ισούται με τη συχνότητα επισκέψεων της κατάστασης 0 που είναι $\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}$. Καθώς $m \rightarrow \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_0 = p$.

Με άλλα λόγια, για πολύ μεγάλη διάρκεια φυσικής ζωής της μπάρας ($m \rightarrow \infty$), (δηλαδή για καλή ποιότητα του εξαρτήματος), η συχνότητα αντικατάστασής της ισούται με την πιθανότητα p με την οποία ο χρήστης της προκαλεί ζημιά.

Άσκηση 4.

(α) Παρατηρούμε το γράφημα και βλέπουμε ότι η αλυσίδα έχει δύο μεταβατικές καταστάσεις, τις 1 και 2, και τρεις έμμονες, τις 3, 4 και 5. Οι $\{3, 4\}$ αποτελούν μια επαναληπτική κλάση ενώ η 5 από μόνη της μια άλλη κλάση. Δεν υπάρχουν περιοδικές καταστάσεις.

(β) Πολύ απλά, $P(X_1 = 2, X_2 = 5 | X_0 = 1) = p_{12} \cdot p_{25} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

(γ) Λύνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη κλάση $\{3, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4.$$

Μαζί με την $\pi_3 + \pi_4 = 1$, παίρνουμε ότι $\pi_3 = 3/7$ και $\pi_4 = 4/7$.

(δ) Αφού βρισκόμαστε μέσα στη κλάση $\{3, 4\}$, έχουμε αυτομετάβαση όποτε συμβαίνει μετάβαση από την 3 στη 3 ή από την 4 στη 4. Μακροπρόθεσμα, η πιθανότητα του πρώτου γεγονότος είναι $\frac{1}{3}\pi_3$ και του δεύτερου είναι $\frac{1}{2}\pi_4$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 = \frac{3}{7}.$$

(ε) T είναι ο χρόνος έως την απορρόφηση του συστήματος (από τη κλάση $\{3, 4\}$ ή τη κατάσταση 5). Παρατηρώντας το γράφημα, η T ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1/3$:

$$p_T(n) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(στ) Η $P(X_T = 5 | X_0 = 1)$ είναι πολύ απλά η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την $s = 5$ ξεκινώντας από την $i = 1$. Οι πιθανότητες απορρόφησης ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} a_5 &= 1 \\ a_3 &= a_4 = 0 \\ a_1 &= \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 \\ a_2 &= \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_5 \end{aligned}$$

Λύνοντας παίρνουμε: $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Συνεπώς $P(X_T = 5 | X_0 = 1) = a_1 = \frac{1}{4}$.

(ζ) Προφανώς το αναμενόμενο κέρδος εξαρτάται από το μέσο χρόνο έως την απορρόφηση του συστήματος (ξεκινώντας από τις 1 ή 2):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 && : \text{ μέσο \# μεταβάσεων έως την απορρόφηση ξεκινώντας από την 1.} \\ \mu_2 &= 1 + \frac{2}{3}\mu_1 && : \text{ μέσο \# μεταβάσεων έως την απορρόφηση ξεκινώντας από την 2.} \end{aligned}$$

Αλλά κερδίζουμε 1€ για κάθε μετάβαση στην 1 και 2€ για κάθε μετάβαση στη 2. Συνεπώς

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \\ u_2 &= 2 + \frac{2}{3}u_1 \end{aligned}$$

άρα λύνοντας έχουμε $u_1 = 3.75$ € και $u_2 = 4.5$ €.