

**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**  
**Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**  
**30 Απριλίου 2012 - Διάρκεια: 2 Ωρες**

**Θέμα 1 - 40 μονάδες.**

Δύο πομποί, ο  $A$  και ο  $B$ , στέλνουν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, μηνύματα στον ίδιο δέκτη σύμφωνα με στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς  $\lambda_A = 0.2$  μηνύματα ανά δευτερόλεπτο και  $\lambda_B = 0.6$  μηνύματα ανά δευτερόλεπτο, αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι όλα τα μηνύματα είναι τόσο σύντομα που καταλαμβάνουν ένα σημείο στον άξονα του χρόνου.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μεταξύ των αφίξεων του τρίτου και τετάρτου μηνύματος στο δέκτη;

(β) Ποιο είναι το μέσο πλήθος των μηνυμάτων τύπου  $A$  που φτάνουν στο δέκτη στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μήκους 12 δευτερολέπτων;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο δέκτης θα λάβει ακριβώς 9 μηνύματα στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μήκους 10 δευτερολέπτων;

(δ) Υποθέτουμε ότι το πλήθος των bits σε κάθε μήνυμα, ανεξαρτήτως πηγής, είναι μία τυχαία μεταβλητή  $W$  η οποία παίρνει τις τιμές 1 και 2 με την ίδια πιθανότητα  $1/2$ . Έστω  $N$  το συνολικό πλήθος των bits που λαμβάνει ο δέκτης στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μήκους  $t$  δευτερολέπτων. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ.  $N$ .

**Θέμα 2 - 30 μονάδες.**

Έστω μία στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων  $\lambda$ . Δεδομένου ότι  $M$  πακέτα έφτασαν στο χρονικό διάστημα  $(0, t]$ , ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ακριβώς  $k$  πακέτα έφτασαν στο χρονικό διάστημα  $(0, \tau]$ , όπου  $\tau < t$  και  $0 \leq k \leq M$ ; Δηλαδή υπολογίστε την  $P(N(0, \tau] = k \mid N(0, t] = M)$ , όπου η τ.μ.  $N(0, \tau]$  συμβολίζει το πλήθος των αφίξεων στο χρονικό διάστημα  $(0, \tau]$ . Αναγνωρίζετε την κατανομή που προκύπτει; Μπορείτε με μία φράση να εξηγήσετε το αποτέλεσμα;

**Θέμα 3 - 30 μονάδες.**

Το σώμα των ψηφοφόρων σε ένα χωριό της Κρήτης αποτελείται από 300 άντρες και 196 γυναίκες. Κάθε άντρας (αντίστοιχα, κάθε γυναίκα) θα πάει να ψηφίσει με πιθανότητα 0.4 (αντίστοιχα, 0.5) στις επόμενες εκλογές, ανεξάρτητα από κάθε άλλο. Χρησιμοποιήστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για να υπολογίσετε την πιθανότητα του γεγονότος ότι θα ψηφίσουν περισσότεροι άντρες από γυναίκες.