

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Προόδου

30-4-2012

Θέμα 1.

(α) Η $\sigma.$ δ. αφίξεων στο δέκτη είναι Poisson με ένταση $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0.2 + 0.6 = 0.8$ μηνύματα/ δευτερόλεπτο. Συνεπώς, το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (άρα και μεταξύ της τρίτης και τέταρτης άφιξης) ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.8$. Επομένως έχει μέση τιμή $1/\lambda = \underline{1.25sec}$.

(β) Το πλήθος των μηνυμάτων τύπου A σε διάστημα t ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο $\lambda_A \cdot t = 0.2 \times 12 = 2.4$. Συνεπώς η μέση τιμή του είναι 2.4 μηνύματα.

(γ) Το πλήθος των μηνυμάτων, M , που φτάνουν στο δέκτη σε διάστημα t ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B) \cdot t = (0.2 + 0.6) \times 10 = 8$. Συνεπώς,

$$P(M = 9) = e^{-8} \frac{8^9}{9!} = \underline{0.1241}$$

(δ) Έχουμε ότι

$$p_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & w = 1, 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Το μέσο πλήθος bits σε ένα μήνυμα είναι: $E[W] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1.5$. Ισχύει ότι $N = W_1 + W_2 + \dots + W_M$, όπου W_i είναι το πλήθος των bits στο i -στό μήνυμα και M είναι το πλήθος των μηνυμάτων που φτάνουν στο δέκτη σε t sec. Από το (γ), $M \sim Poisson(0.8t)$.

Εφαρμόζουμε το ΘΟΜΤ:

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(M = m) \cdot E[N/M = m] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(M = m) \cdot E[W_1 + \dots + W_m] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(M = m) \cdot mE[W] \\ &= E[M] \cdot E[W] \\ &= 0.8t \times 1.5 = \underline{1.2t} \end{aligned}$$

Θέμα 2.

Εφαρμόζουμε τη σχέση για τη δεσμευμένη πιθανότητα :

$$P\left(N(0, \tau] = k / N(0, t] = M\right) = \frac{P\left(N(0, \tau] = k \cap N(0, t] = M\right)}{P\left(N(0, t] = M\right)} \quad (1)$$

Έχουμε ότι:

$$\left\{N(0, \tau] = k\right\} \cap \left\{N(0, t] = M\right\} = \left\{N(0, \tau] = k\right\} \cap \left\{N(\tau, t] = M - k\right\}$$

όπου παρατηρούμε ότι τα διαστήματα $(0, \tau]$ και $(\tau, t]$ είναι ξένα μεταξύ τους. Συνεπώς, από τις ιδιότητες της Poisson σ.δ., οι τ.μ. $N(0, \tau]$ και $N(\tau, t]$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως,

$$P\left(N(0, \tau] = k \cap N(0, t] = M - k\right) = P\left(N(0, \tau] = k\right) \cdot P\left(N(0, t] = M - k\right)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} P\left(N(0, t] = M\right) &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^M}{M!}, \\ P\left(N(0, \tau] = k\right) &= \frac{e^{-\lambda \tau} (\lambda \tau)^k}{k!}, \\ P\left(N(\tau, t] = M - k\right) &= \frac{e^{-\lambda(t-\tau)} (\lambda(t-\tau))^{M-k}}{(M-k)!}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1), έχουμε ότι

$$P\left(N(0, \tau] = k / N(0, t] = M\right) = \binom{M}{k} \left(\frac{\tau}{t}\right)^k \left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{M-k}, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

Επομένως, η δεσμευμένη κατανομή είναι Διωνυμική με παραμέτρους $(M, \tau/t)$.

Θέμα 3.

Έστω M (N) το πλήθος των αντρών (γυναικών) που θα ψηφίσουν. Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $M \sim \Delta(n = 300, p = 0.4)$ και $N \sim \Delta(n = 196, p = 0.5)$. Ζητούμε την πιθανότητα $P(M > N) = P(M - N > 0)$.

Το ΚΟΘ δε μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα στη διαφορά $M - N$ αλλά ξεχωριστά στη M και στη N , καθώς αυτές είναι το άθροισμα $n = 300$ και $n = 196$ i.i.d. Bernoulli τυχαίων μεταβλητών, αντίστοιχα.

Άρα, η M μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά Γκαουσιανή τ.μ. με $E[M] = np = 300 \times 0.4 = 120$ και διασπορά $var(M) = np(1-p) = 300 \times 0.4 \times 0.6 = 72$: $M \sim N(120, 72)$.

Ομοίως, η N μπορεί να θεωρηθεί Γκαουσιανή με $E[N] = np = 196 \times 0.5 = 98$, $var(M) = np(1-p) = 196 \times (0.5)^2 = 49$: $N \sim N(98, 49)$.

Τώρα, η $M - N$ είναι προσεγγιστικά Γκαουσιανή ως διαφορά δύο Γκαουσιανών τ.μ. κι έχει:

$$\begin{aligned} E[M - N] &= E[M] - E[N] = 120 - 98 = 22 \\ var(M - N) &= var(M) + var(N) = 72 + 49 = 121. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$P(M - N > 0) = P\left(\frac{M - N - 22}{11} > \frac{-22}{11}\right) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = \underline{0.974}.$$