

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/10/2013

Ημερομηνία Παράδοσης: 6/11/2013

Άσκηση 1. Μας δίνεται η διακριτή τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X για την οποία ισχύει ότι:

$$M_X(s) = a + be^{2s} + ce^{4s}, \quad E[X] = 3, \quad \text{var}(X) = 2.$$

Υπολογίστε τις σταθερές a , b και c καθώς και τη συνάρτηση πιθανότητας της X .

Άσκηση 2. Η διακριτή τ.μ. X έχει μέση τιμή $E[X] = 5$ και ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(s) = ae^s + be^{13(e^s-1)}$. Υπολογίστε τα εξής:

(α) Τις σταθερές a και b .

(β) $E[e^{5X}]$.

(γ) $P(X = 1)$ αφού δείξετε την ιδιότητα ότι για μία μη αρνητική διακριτή τ.μ. ισχύει ότι $\frac{d^n}{d(e^s)^n} M_X(s) |_{e^s=0} = n! p_X(n)$.

(δ) $E[X^2]$.

Άσκηση 3. Η συνεχής τ.μ. X έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_X(s) = \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8}.$$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X και την $P(X \geq 0.5)$.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της X .

Άσκηση 4 - Ανισότητες, Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ένα δίκαιο εξάεδρο ζάρι ρίχνεται n φορές. Έστω X_i το αποτέλεσμα της i -στής ρίψης. Υποθέτουμε ότι οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και ορίζουμε το άθροισμα των ρίψεων $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Υπολογίστε (ένα άνω όριο για) την πιθανότητα $P(S_{100} \geq 400)$.

(α) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov.

(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.

(γ) Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Τι παρατηρείτε ;

Άσκηση 5 - Στοχαστικές Διαδικασίες. Έστω μια ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατα-
νεμημένων τ.μ. $\{X_n : n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή:
 $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. Η στοχαστική διαδικασία δίνεται ως είσοδος σε ένα γραμμικό φίλτρο το οποίο
παράγει ως έξοδο την στοχαστική διαδικασία Y_n ως εξής:

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} X_{n-k} r^k = X_n + rX_{n-1} + r^2X_{n-2} + r^3X_{n-3} + \dots$$

όπου $|r| < 1$ η σταθερά του παραπάνω λεγόμενου "γεωμετρικού φίλτρου" ή "ολοκληρωτή".

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της εξόδου Y_n .

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της εξόδου, $M_{Y_n}(s) = E[e^{sY_n}]$ και τη συνάρτηση πυκνότητας πι-
θανότητας $f_{Y_n}(y)$ της Y_n .

(γ) Δείξτε ότι

$$Y_n = rY_{n-1} + X_n.$$

Αυτό είναι γνωστό ως το "φίλτρο αυτοπαλινδρόμησης" (autoregressive filter).

Άσκηση 6 - Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ψηφοφόροι κάποιας περιφέρειας ψήφισαν για έναν από
τους υποψήφιους Α και Β. Η αρχική επιβεβαιωμένη καταμέτρηση των ψήφων έδειξε ότι ο υποψήφιος
Β προηγείται του Α με 537 ψήφους. Όμως υπάρχουν 25.600 ψηφοδέλτια τα οποία εκκρεμούν στο
εκλογοδικείο και ως εκ τούτου δεν έχουν καταχωρηθεί ακόμα σε κανέναν από τους δύο υποψήφιους.

Υποθέστε ότι τελικά και τα 25.600 ψηφοδέλτια που εκκρεμούν θα βρεθούν έγκυρα και θα αποδο-
θούν ισοπίθانا στους δύο υποψηφίους, κάθε ένα ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Έστω X και Y το
πλήθος των ψηφοδελτίων (από τα 25.600) που θα αποδοθούν στους Α και Β, αντίστοιχα.

(α) Τι είδους μεταβλητή είναι η X ;

(i) Bernoulli με παράμετρο $p =$

(ii) Poisson με παράμετρο $\lambda =$

(iii) Γεωμετρική με παράμετρο $p =$

(iv) Διωνυμική με παραμέτρους $(n, p) =$

(v) Αρνητική Διωνυμική με παραμέτρους $(r, p) =$

(vi) Καμία από τις παραπάνω, αλλά δίνεται από τη σχέση $p_X(k) =$

(β) Ποια είναι η μέση τιμή και ποια η διασπορά της X ;

(γ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με μία πρόταση.

(δ) Από τη στιγμή που και οι 25.600 ψηφοί προσμετρούνται στο τελικό αποτέλεσμα, είναι δυνατόν οι
Α και Β να λάβουν τελικά τον ίδιο αριθμό ψήφων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με μία πρόταση.

(ε) Αφού οι 25.600 ψήφοι προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα, ποια είναι η μέση τιμή και η
διασπορά της τ.μ $Z = X - Y$, του καθαρού κέρδους του υποψηφίου Α στην ψηφοφορία;

(στ) Αφού οι 25.600 ψήφοι προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα, χρησιμοποιήστε το Θεώρημα
Κεντρικού Ορίου (ΘΚΟ) για να εκτιμήσετε την πιθανότητα να κερδίσει ο Β την εκλογή.

(ζ) Τώρα, υποθέστε ότι στη συγκεκριμένη εκλογική περιφέρεια, ο Α είναι πιο δημοφιλής από τον Β. Έτσι, κάθε ένα από τα 26.500 ψηφοδέλτια είναι υπέρ του Α με πιθανότητα $p > 0,5$. Π.χ. αν $p = 1$, ο Α θα λάβει και τα 26.500 ψηφοδέλτια και θα κερδίσει την εκλογή από τον Β όταν αυτά προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα. Για κάπως μικρότερες τιμές του p , υπάρχει "αρκετή" πιθανότητα ο Α να προσπεράσει τον Β στην τελική καταμέτρηση. Χρησιμοποιώντας και πάλι το ΘΚΟ, υπολογίστε την ελάχιστη τιμή του p έτσι ώστε η πιθανότητα να κερδίσει ο Α την εκλογή να είναι μεγαλύτερη από 0,5.