ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/10/2013 Ημερομηνία Παράδοσης: 6/11/2013

Άσκηση 1.
Για να βρούμε τις σταθερές a,b και c χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$M(0) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$$

$$\frac{d}{ds}M_X(s)|_{s=0} = E[X] = 3 \Rightarrow 2b + 4c = 3$$

$$\frac{d^s}{ds^s}M_X(s)|_{s=0} = Var[X] + (E[X])^2 = 2 + 3^2 = 11 \Rightarrow 4b + 16c = 11$$

Λύνοντας το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2b + 4c = 3 \\ 4b + 16c = 11 \end{cases}$$

Έχουμε ότι $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{2}{8}$ και $c = \frac{5}{8}$

Οπότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται: $M_X(s) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8}e^{2s} + \frac{5}{8}e^{4s}$

Η συνάρτηση πιθανότητας της X προκύπτει από από τις δυνάμεις του e^s και τους συντελεστές a,b και c που βρήκαμε παραπάνω. Οπότε έχουμε:

$$P(X = 0) = a = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 2) = b = \frac{2}{8}$$
$$P(X = 4) = c = \frac{5}{8}$$

Άσκηση 2.
(α) Έχουμε ότι $M_X(0) = 1$ και $\frac{d}{ds}M_X(s)|_{s=0} = E[X]$.Χρησιμοποιώντας τις δυο αυτές εξισώσεις καταλήγουμε σένα συστημα εξισώσεων ως προς a και b:

$$\begin{aligned} M_X(0) &= ae^0 + be^{13(e^0-1)} = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ E[X] &= \frac{d}{ds}M_x(s)|_{s=0} = (ae^s + 13e^s be^{13(e^s-1)})|_{s=0} \\ &= ae^0 + 13be^0 e^{13(e^0-1)} \Rightarrow a + 13b = 5 \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε ότι $a = 2/3$ και $b = 1/3$.

(β) Έχουμε ότι

$$E[e^{5X}] = M_X(s)|_{s=5} = ae^5 + be^{13(e^5-1)} = \frac{2}{3}e^5 + \frac{1}{3}e^{13(e^5-1)} = 6.20 \times 10^{831}$$

(γ) Θέλουμε να δειξουμε ότι για μία μη αρνητική διακριτή τ.μ X ισχύει:

$$\frac{d^n}{d(e^s)^n}M_X(s)|_{e^s=0} = n!p_X(n)$$

Γνωρίζουμε ότι για μία μη-αρνητική διακριτη τ.μ X από τον ορισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης έχουμε ότι:

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_x e^{sX} p_{X(x)} = p_{X(0)}e^{0s} + p_{X(1)}e^{1s} + p_{X(2)}e^{2s} + ...$$

Τότε έχουμε:

$$M_X(s)|_{e^s=0} = p_X(0)$$

$$\frac{d}{de^s}M_X(s)|_{e^s=0} = (1p_X(1) + 2p_X(2)e^s + ...)|_{e^s=0} = p_X(1)$$

$$\frac{d}{d(e^s)^2}M_X(s)|_{e^s=0} = (2!p_X(2) + 3!P_X(3)e^s + ...)|_{e^s=0} = p_X(2)$$

Οπότε τελικά καταληγουμε:

$$\frac{d}{d(e^s)^n}M_X(s)|_{e^s=0} = (n!p_X(n) + (n+1)!P_X(n+1)e^s + ...)|_{e^s=0} = p_X(n)$$

Για τον υπολογισμό του $P(X = 1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X = 1) = p_X(1) = \frac{d}{de^s}M_X(s)|_{e^s=0} = (ae^s + be^{13(e^s-1)})'|_{e^s=0} \\ = (a + b13e^{13(e^s-1)})|_{e^s=0} = a + 13be^{-13} = \frac{2}{3} + 13\frac{1}{3}e^{-13} = 0.667 \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
E[X^2] = \frac{d^s}{ds^2} M_X(s)|_{s=0} &= (ae^s + be^{13(e^s-1)})'' = (ae^s + 13be^s e^{13(e^s-1)})' \\
&= ae^s + 13b(e^s e^{13(e^s-1)} + 13e^s e^s e^{13(e^s-1)})|_{s=0} \\
&= a + 182b = \frac{2}{3} + 182\frac{1}{3} = \frac{184}{3}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3.

(α) Αρχικά αναλύουμε την ροπογεννήτρια συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$M_X(s) = \frac{8-3s}{s^2-6s+8} = \frac{8-3s}{(s-4)(s-2)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-2}$$

$$
\begin{aligned}
A = (s-4)M_X(s)|_{s=4} = \frac{8-3s}{(s-2)(s-4)}(s-4)|_{s=4} = \frac{8-3s}{s-2}|_{s=4} = -2 \\
B = (s-2)M_X(s)|_{s=2} = \frac{8-3s}{(s-2)(s-4)}(s-2)|_{s=2} = \frac{8-3s}{s-4}|_{s=2} = -1
\end{aligned}
$$

Άρα η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται:

$$M_X(s) = \frac{-2}{s-4} + \frac{-1}{s-2} = \frac{1}{2}(\frac{4}{4-s} + \frac{2}{2-s})$$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που προκύπτει από την ροπογεννήτρια θα είναι:

$$f_x(x) = \frac{1}{2}(4e^{-4x} + 2e^{-2x}), \quad x > 0$$

Υπολογίζουμε τώρα την ζητούμενη πιθανότητα και έχουμε:

$$P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{+\infty} \frac{1}{2}(4e^{-4x} + 2e^{-2x})dx = \frac{e^-2}{2} + \frac{e^-1}{2}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση, η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαιας μεταβλητής X γίνονται:

$$E[X] = \frac{d}{ds}M_X(s)|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s})|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2}|_{s=0} = \frac{3}{8}$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2}M_X(s)|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s})|_{s=0} = \frac{4}{(4-s)^3} + \frac{2}{(2-s)^3}|_{s=0} = \frac{5}{16}$$

Άρα η διασπορά γίνεται:

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{16} - (\frac{3}{8})^2 = \frac{11}{64}$$

Άσκηση 4-Ανισότητες,Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

(α) $E[X_i] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$ και σύμφωνα με την ανισότητα $Markov$ έχουμε

$$P[S_{100} \geq 400] \leq \frac{100(3.5)}{400} = \frac{7}{8} = 0.875$$

(β)

$$E[X_i^2] = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = 15$$

Έχουμε επίσης ότι $var(X_i) = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = 15 - 3.5^2 = 2.75$. Σύμφωνα με την ανισότητα του $Chebyshev$:

$$P[S_{100} \geq 400] = P[|S_{100}| - 350 \geq 50] \leq \frac{100(2.75)}{50^2} = 0.11$$

(γ) Η προσέγγιση με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα μας δίνει:

$$P[S_{100} \geq 400] = P[\frac{S_{100}-350}{\sqrt{(2.75)100}} \geq \frac{400-350}{\sqrt{(2.75)100}}] \approx Q(\frac{400-350}{\sqrt{(2.75)100}}) = Q(3.015) = 1 - \Phi(3.015) \approx 0.0009$$

Άσκηση 5- Στοχαστικές Διαδικασίες

(α) Η μέση τιμή της X_n είναι 0 και η διασπορά είναι σ^2. Επομένως,

$$E[Y_n] = E[\sum_{k=0}^{\infty} r^k X_{n-k}] = \sum_{k=0}^{\infty} r^k E[X_{n-k}] = 0.$$

Λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής και της ανεξαρτησίας των X_n έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma_{Y_n}^2 &= E[(\sum_{k=0}^{\infty} r^k X_{n-k})^2] = E(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} r^k X_k r^j X_j) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} r^k r^j E(X_k X_j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-r^2}.\end{aligned}$$

(β) Ο μετασχηματισμός του X είναι $M_X(s) = e^{s^2\sigma^2/2}$. Τότε,

$$\begin{aligned}E[e^{sY_n}] &= E[e^{s\sum_{k=0}^{\infty} X_{n-k}r^k}] = E[\prod_{k=0}^{\infty} e^{sX_{n-k}r^k}] = \prod_{k=0}^{\infty} E[e^{sX_{n-k}r^k}] \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} M_X(sr^k) = e^{\frac{s^2\sigma^2\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}}{2}} = e^{\frac{s^2\sigma_Y^2}{2}}\end{aligned}$$

όπου είναι ο μετασχηματισμός μιας τυχαίας Γκαουσιανής μεταβλητής με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_Y^2. Θα μπορούσαμε να έχουμε συμπέρασμα για την συνάρτηση πιθανότητας από το γεγονός οτι η Y_n είναι γραμμικός συνδυασμός (με βάρη) ανεξάρτητων τυχαίων Γκαουσιανών μεταβλητών. Επομένως είναι Γκαουσιανή (με μέση τιμή και διασπορά που έχουν ήδη βρεθεί).

(γ) Η εξίσωση της Y_n μας δίνει:

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=0}^{\infty} X_{n-k} r^k = X_n + \sum_{k=1}^{\infty} X_{n-k} r^k = X_n + r \sum_{k=1}^{\infty} X_{n-k} r^{k-1} \\ &= X_n + r \sum_{k=0}^{\infty} X_{n-1-k} r^k = rY_{n-1} + X_n. \end{aligned}$$

Άσκηση 6-Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

(α) Προφανώς η τ.μ. X είναι διωνυμική με $(n,p) = (25.600, \frac{1}{2})$.

(β)

$$\begin{aligned} E[X] &= np = 25600 \times \frac{1}{2} = 12800 \\ var(X) &= np^2 = 6400 \end{aligned}$$

(γ) Αφού $X + Y = 25600$, οι X, Y δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες.

(δ) Οι X και Y είναι απαραίτητα και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. Ως εκ τούτου, η διαφορά τους, $X - Y$, δεν μπορεί να ισούται με 537 ,την υπεροχή του Β από τον Α. Επομένως, κάποιος από τους Α, Β θα νικήσει.

(ε) Η τ.μ. $Z = X - Y$ έχει μέση τιμή $E[Z] = E[X - Y] = E[2X - 25600] = 2E[X] - 25600 = 0$ και διασπορά $var(X) = var(2X - 25600) = 4var(X^2) = 25600$

(στ) Σύμφωνα με το Θεώρημα Κεντρικού Ορίου, η τ.μ. Z μπορεί να προσεγγιστεί από μια κανονική τ.μ. με $Z \sim N(0, 25600)$.

Επομένως, $P(\textit{ο Β κερδίζει}) = P(Z \leq 536) \approx \Phi(\frac{536-0}{\sqrt{25600}}) = \Phi(3.35) \cong 0.9996$.

(ζ) Σε αυτήν την περίπτωση, η τ.μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $(25600, p)$. Επομένως η διαφορά $Z = X - Y = 2X - 25600$ έχει $E[Z] = 2E[X] - 25600 = 2 \times 25600p - 25600 = (2p-1)25600$ και διασπορά $var(Z) = 4var(X) = 4 \times 25600p^2$

$P(\textit{ο Α κερδίζει}) = P(Z \geq 538) \cong 1 - P(Z \leq 538) = 1 - \Phi(\frac{538-25600(2p-1)}{\sqrt{var(Z)}}) \geq 0.5$

Το όρισμα της $\Phi(.)$ πρέπει να είναι το πολύ 0, επομένως $538 \leq 25600(2p-1) \Rightarrow p \geq 0.5105$.