

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/11/2013

Ημερομηνία Παράδοσης: 27/11/2013

Άσκηση 1. Δύο πομποί A και B στέλνουν μηνύματα σε ένα δέκτη σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_A και λ_B , αντίστοιχα. Τα μηνύματα είναι τόσο σύντομα ώστε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι καταλαμβάνουν σημεία στον άξονα του χρόνου. Το πλήθος των λέξεων σε κάθε μήνυμα, ανεξάρτητα από ποιον πομπό προέρχεται, μοντελοποιείται από την τυχαία μεταβλητή W με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{3} & w = 1, \\ \frac{1}{2} & w = 2, \\ \frac{1}{6} & w = 3, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι σε μία χρονική περίοδο t συνολικά 9 μηνύματα θα φτάσουν στο δέκτη;

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής μέσης τιμής, υπολογίστε το μέσο πλήθος των λέξεων, $E[N]$, που φτάνουν στο δέκτη σε χρόνο t .

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου έως ότου ο δέκτης λάβει ακριβώς 8 μηνύματα *τριών λέξεων* το καθένα από τον πομπό A.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ακριβώς 8 από τα επόμενα 12 μηνύματα να προέρχονται από τον πομπό A.

Άσκηση 2. Κάνετε ένα ταξίδι σαφάρι στην Αφρική. Ένα από τα αξιοθέατα του ταξιδιού είναι η παρακολούθηση λιονταριών και ελεφάντων που έρχονται να πιουν νερό από τον ποταμό Νίγηρα. Τα λιοντάρια φτάνουν στο ποτάμι σύμφωνα με μία διαδικασία Ποισσον με ρυθμό αφίξεων $\lambda_l = 8$ την ώρα, ενώ οι ελέφαντες καταφθάνουν σύμφωνα με μία ανεξάρτητη διαδικασία Ποισσον με ρυθμό αφίξεων $\lambda_e = 2$ την ώρα. Την πρώτη μέρα του ταξιδιού σας, φτάνετε στο ποτάμι ελπίζοντας να δείτε πολλά ζώα. Υποθέστε ότι λιοντάρια και ελέφαντες είναι τα μόνα διψασμένα ζώα που επισκέπτονται το ποτάμι.

(α) Έστω N ο αριθμός των ζώων που βλέπετε τις 3 πρώτες ώρες. Βρείτε τα μεγέθη $E[N]$ και $var(N)$.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε τον 3ο ελέφαντα πριν το 9ο λιοντάρι;

(γ) Μετά από 3 ώρες έχετε δει 24 λιοντάρια αλλά κανένα ελέφαντα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε ένα ελέφαντα μέσα στην επόμενη ώρα;

(δ) Ο φίλος σας έχει φτάσει στο ποτάμι με την ψηφιακή του κάμερα, γεμάτος χαρά ότι θα βγάλει πολλές ωραίες φωτογραφίες. Δυστυχώς η κάμερα του έπεσε και δεν λειτουργεί σωστά: κάθε φορά που πατάει το κουμπί, η κάμερα δεν λειτουργεί με πιθανότητα 0.1, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Ο φίλος σας επιχειρεί να φωτογραφήσει κάθε φορά που ένα ζώο (λιοντάρι ή ελέφαντας) φτάνει στο

ποτάμι. Έστω X ο χρόνος (σε ώρες) έως ότου πάρει την τρίτη επιτυχή φωτογραφία ενός ελέφαντα. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ;

Άσκηση 3. Τα χρονικά διαστήματα (μετρημένα σε λεπτά της ώρας) μεταξύ των αφίξεων αυτοκινήτων σε ένα σταθμό ελέγχου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικές τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 2$. Οι χρόνοι των διαδοχικών αφίξεων καταχωρούνται σε μικρές κάρτες, όπου κάθε κάρτα έχει χώρο για τρεις καταχωρήσεις. Όταν γεμίζει μία κάρτα, αντικαθίσταται από άλλη.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων;

(β) Δεδομένου ότι κανένα αυτοκίνητο δεν έφτασε τα τελευταία 4 λεπτά, ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού K των αυτοκινήτων που θα φτάσουν τα επόμενα 6 λεπτά;

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή, και τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού χρόνου που απαιτείται για να γεμίσουν οι πρώτες 12 κάρτες καταχώρησης.

(δ) Θεωρείστε τα ακόλουθα δύο πειράματα.

- Διαλέγετε τυχαία μία κάρτα από μία στοίβα από συμπληρωμένες κάρτες και σημειώνετε το συνολικό χρόνο, Y , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[Y]$ και $var(Y)$.
- Φτάνετε στο σταθμό ελέγχου μία τυχαία χρονική στιγμή. Όταν η κάρτα που χρησιμοποιείται τη στιγμή της άφιξής σας γεμίσει, σημειώνετε το συνολικό χρόνο, W , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[W]$ και $var(W)$.

Βοήθεια: Στο υποερώτημα (δ), σκεφτείτε το παράδοξο της τυχαίας εμφάνισης.