

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (α) Έστω R ο συνολικός αριθμός των μηνυμάτων που φτάνουν στο δέκτη και από τους δύο πομπούς. Προφανώς, η τ.μ. R ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B)t$.

Επομένως,

$$P(R = 9) = p_R(9) = \frac{[(\lambda_A + \lambda_B)t]^9}{9!} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}$$

- (β) Η τ.μ. N μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$N = W_1 + \dots + W_R$$

όπου W_i είναι το πλήθος των λέξεων στο i -οστό μήνυμα. Δηλαδή, το N εκφράζεται ως το άθροισμα ενός *τυχαίου* αριθμού, R , τυχαίων μεταβλητών W_i .

Έστω ότι r μηνύματα φτάνουν σε χρόνο t , δηλ. $R = r$. Τότε,

$$E[N|R = r] = E[W_1 + \dots + W_r] = rE[W_i]$$

Από το Θ.Ο.Μ.Τ., προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{r=0}^{+\infty} p_R(r) E[N|R = r] \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} p_R(r) r E[W_i] \\ &= E[R] \cdot E[W_i] \end{aligned}$$

Αλλά,

$$E[W_i] = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

ενώ

$$E[R] = (\lambda_A + \lambda_B)t$$

Τελικά, $E[N] = \frac{11}{6}(\lambda_A + \lambda_B)t$.

- (γ) Μηνύματα 3 λέξεων φτάνουν από τον πομπό A σύμφωνα με μία *Poisson* σ.δ., με ρυθμό

$$\lambda_A \cdot P(W = 3) = \lambda_A \cdot p_W(3) = \frac{\lambda_A}{6}$$

Συνεπώς, ο χρόνος, X , έως τη λήψη 8 μηνυμάτων τριών λέξεων ακολουθεί κατανομή *Erlang* τάξης 8, με παράμετρο $\frac{\lambda_A}{6}$:

$$f_X(x) = \frac{(\lambda_A/6)^8 x^7}{7!} e^{-\frac{\lambda_A}{6}x}, \quad x \geq 0$$

(δ) Η πιθανότητα ένα μήνυμα που λαμβάνεται στο δέκτη να προέρχεται από τον πομπό A είναι $\lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$. Τα μηνύματα που προέρχονται από τον A ορίζουν μια σ.δ. *Bernoulli* με παράμετρο $\lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$. Επομένως, το πλήθος των μηνυμάτων που προέρχονται από τον πομπό A ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 12$ και $p = \lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\binom{12}{8} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^8 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^4$$

Άσκηση 2.

(α) Εφόσον οι διαδικασίες με τις οποίες καταφτάνουν τα λιοντάρια και οι ελέφαντες είναι ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες *Poisson* με παραμέτρους $\lambda_l = 8$ και $\lambda_e = 2$, τότε η συνολική διαδικασία με την οποία καταφτάνουν τα ζώα είναι *Poisson* με παράμετρο $\lambda = \lambda_l + \lambda_e = 8 + 2 = 10$. Ο συνολικός αριθμός των ζώων που φτάνουν σε τις 3 πρώτες ώρες στο ποτάμι, σύμφωνα με την διαδικασία *Poisson* θα έχει παράμετρο $\lambda \times 3 = 30$.

Οπότε η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής N που ορίζει τον αριθμό των ζώων για τις 3 πρώτες ώρες είναι:

$$\begin{aligned} E[N] &= \lambda \times 3 = 30 \\ \text{var}[N] &= \lambda \times 3 = 30 \end{aligned}$$

(β) Αρχικά, θα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα του γεγονότος ότι το k -στό ζώο που φτάνει στο ποτάμι είναι ελέφαντας. Έστω E_k το γεγονός αυτό. Οπότε έχουμε:

$$P(E_k) = \frac{2}{8+2} = \frac{1}{5}$$

Θεωρώντας την άφιξη του ελέφαντα ως "επιτυχία" σχηματίζεται μια διαδικασία *Bernoulli* με παράμετρο $p = \frac{1}{5}$. Το γεγονός να παρατηρήσουμε τον τρίτο ελέφαντα πριν το ένατο λιοντάρι είναι ισοδύναμο με το γεγονός να παρατηρήσουμε τον τρίτο ελέφαντα πριν από τις 12 η ώρα στην διαδικασία *Bernoulli* που περιγράφουμε. Έστω, T_3 η χρονική στιγμή της άφιξης του τρίτου ελέφαντα στη διαδικασία *Bernoulli*, τότε η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P[T_3 < 12] = \sum_{k=3}^{11} P[T_3 = k] = \sum_{k=3}^{11} \binom{k-1}{2} p^3 (1-p)^{k-3} = \sum_{k=3}^{11} \binom{k-1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{k-3}$$

(γ) Επειδή η διαδικασία άφιξης ενός λιονταριού είναι ανεξάρτητη από την διαδικασία άφιξης ενός ελέφαντα, τότε και τα γεγονότα ότι "24 λιοντάρια φτάνουν μέσα σε 3 ώρες" και "κανένας ελέφαντας δεν έχει φτάσει", είναι επίσης ανεξάρτητα. Έστω λοιπόν T_1 η χρονική στιγμή της πρώτης άφιξης ενός ελέφαντα.

Έστω το ενδεχόμενο A : Ένας ελέφαντας φτάνει την 4η ώρα δεδομένου ότι κανένας ελέφαντας δεν εμφανίζεται μέσα σε 3 ώρες. Τότε η επιθυμητή πιθανότητα ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} P(A) &= P[T_1 \leq 4 | T_1 > 3] \\ &= 1 - P[T_1 > 4 | T_1 > 3] \\ &= 1 - P[T_1 > 1](3) \\ &= 1 - e^{-2} \end{aligned}$$

Το βήμα (3) οφείλεται στην έλλειψη μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας *Poisson*.

(δ) Η τυχαία μεταβλητή X δηλώνει το χρόνο έως ότου πάρει την τρίτη επιτυχή φωτογραφία ενός ελέφαντα. Εφόσον η διαδικασία άφιξης των λιονταριών είναι ανεξάρτητη από την διαδικασία άφιξης των ελεφάντων, μπορούμε να επικεντρωθούμε στην διαδικασία άφιξης των ελεφάντων. Οπότε χωρίζουμε την διαδικασία άφιξης των ελεφάντων σε δύο διαδικασίες, η μία αποτελείται από τις επιτυχημένες φωτογραφίες των ελεφάντων (την οποία θα αποκαλούμε διαδικασία άφιξης επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες) και την άλλη η οποία αποτελείται από τις μη επιτυχημένες φωτογραφίες ελεφάντων (την οποία θα αποκαλούμε διαδικασία άφιξης μη επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες). Εφόσον η ποιότητα κάθε φωτογραφίας είναι ανεξάρτητη από κάθε άλλη, η διαδικασία άφιξης επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες είναι μια διαδικασία *Poisson* με παράμετρο $\lambda_{se} = 0.9\lambda_e = 0.9 \times 2 = 1.8$. Επομένως, η X είναι η τρίτη χρονική άφιξη επιτυχημένης φωτογραφίας με ελέφαντα. Άρα η X είναι τυχαία μεταβλητή *Erlang* τρίτης τάξης με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1.8^3 x^2 e^{-1.8x}}{2!}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 3

(α) Το χρονικό διάστημα T μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = 2$. Συνεπώς :

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ λεπτά.}$$

(β) Προφανώς, πρόκειται για αφίξεις *Poisson* με ρυθμό λ . Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας *Poisson*, η κατανομή θα έχει παράμετρο $2 \times 6 = 12$:

$$P_K(k) = \frac{12^k e^{-12}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

(γ) Οι πρώτες 12 κάρτες γεμίζουν με την $12 \times 3 = 36$ άφιξη αυτοκινήτου. Έστω D ο συνολικός χρόνος που απαιτείται. Τότε $D = T_1 = T_2 + \dots + T_{36}$, όπου T_i ανεξάρτητες, εκθετικά κατανομημένες τ.μ. με $\lambda = 2$. Συνεπώς η D ακολουθεί κατανομή *Erlang* τάξης 36: Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η μέση τιμή και η ροπογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου που απαιτείται για να γεμίσουν οι πρώτες 12 κάρτες θα είναι:

$$\begin{aligned} f_D(t) &= \frac{2^{36} t^{35} e^{-2t}}{35!}, t \geq 0 \\ E(D) &= 36E[T] = 18 \\ M_D(s) &= M_{T_1}(s) \cdots M_{T_{36}}(s) = \left(\frac{2}{2-s} \right)^{36} \end{aligned}$$

- (6) (i)** Στην πρώτη περίπτωση προφανώς $Y = T_1 + T_2 + T_3$ και η Y είναι τ.μ. Erlang 3ης τάξης με $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned}E[Y] &= \frac{3}{\lambda} = 1.5 \\var(Y) &= \frac{3}{\lambda^2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

- (ii)** Σε αυτήν την περίπτωση, $W = T_1 + T_2 + L$, όπου L είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ αφίξεων που περιέχουν την χρονική στιγμή που φτάσαμε στο σταθμό ελέγχου. Σύμφωνα με όσα είπαμε όταν μελετούσαμε το παράδοξο της τυχαίας άφιξης, L : Erlang 2ης τάξης με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς η W είναι Erlang 4ης τάξης:

$$\begin{aligned}E[W] &= \frac{4}{\lambda} = 2 \\var(W) &= \frac{4}{\lambda^2} = 1\end{aligned}$$