

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 4/12/2013

Ημερομηνία Παράδοσης: 18/12/2013

Άσκηση 1. Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με έξι καταστάσεις $\{S_0, \dots, S_5\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δώστε το γράφημα της αλυσίδας. Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση S_0 , υπολογίστε την πιθανότητα ότι:

- (α) το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά την χρονική στιγμή k .
- (β) το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την S_4 .
- (γ) το σύστημα επισκέπτεται την S_2 και κατόπιν την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή.
- (δ) το σύστημα επισκέπτεται την S_1 για πρώτη φορά σε χρόνο $n = 3$.
- (ε) το σύστημα βρίσκεται στην S_3 αμέσως μετά την n -στή χρονική στιγμή.

Άσκηση 2. Η απόδοση της ομάδας ποδοσφαίρου του ΟΦΗ είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ηθικό των παιχτών της: Το αποτέλεσμα ενός παιχνιδιού εξαρτάται από αυτό του προηγούμενου. Συγκεκριμένα, όταν η ομάδα κερδίζει ένα παιχνίδι, τότε είτε κερδίζει και το επόμενο με πιθανότητα 0.7, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3. Όταν φέρνει ισοπαλία, τότε είτε κερδίζει το επόμενο παιχνίδι με πιθανότητα 0.4, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3, είτε χάνει με πιθανότητα 0.3. Τέλος, όταν χάνει ένα παιχνίδι, τότε είτε χάνει και το επόμενο με πιθανότητα 0.5, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.4, είτε απογοητεύεται τελείως και σταματά να παίζει με πιθανότητα 0.1.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με τον μικρότερο αριθμό καταστάσεων που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη των παιχνιδιών της ομάδας. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;

(β) Αν το αποτέλεσμα του πρώτου παιχνιδιού είναι ισοπαλία, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι η ομάδα θα τα παρατήσει και θα σταματήσει να παίζει αμέσως μετά το τρίτο παιχνίδι; Υπολογίστε την ίδια πιθανότητα δεδομένου ότι η ομάδα νικάει στο πρώτο παιχνίδι. Τι παρατηρείτε;

Η ομάδα αποφασίζει να προσλάβει ως προπονητή τον Μπάγιεβιτς, ο οποίος αρνείται να την αφήσει να τα παρατήσει. Τώρα, μετά από από μία ήττα, η ομάδα είτε χάνει το επόμενο παιχνίδι με πιθανότητα 0.6, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.4. Όλες οι άλλες πιθανότητες μένουν οι ίδιες.

(γ) Ορίστε τη νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το σύστημα και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.

(δ) Ποια είναι η συχνότητα με την οποία μία ήττα ακολουθείται από μία ισοπαλία; Ποια είναι η συχνότητα με την οποία μία νίκη ακολουθείται από μία ισοπαλία;

Άσκηση 3. Στο γκαράζ του Πανεπιστημίου έχει εγκατασταθεί μία μπάρα η οποία λειτουργεί με κάρτες και δυστυχώς κινδυνεύει από το προσωπικό και τους καθηγητές. Συγκεκριμένα κάθε μέρα ένα αυτοκίνητο προσκρούει στην μπάρα με πιθανότητα p και στην περίπτωση αυτή μία καινούρια μπάρα πρέπει να εγκατασταθεί. Επίσης, μία μπάρα η οποία λειτουργεί για m μέρες αντικαθίσταται από μία νέα για λόγους καλής λειτουργίας.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως τη λειτουργία του συστήματος της μπάρας του γκαράζ. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

(β) Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.

(γ) Σε βάθος χρόνου (μακροπρόθεσμα), ποια είναι η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα; Με τι ισούται αυτή η συχνότητα όταν η διάρκεια m της φυσικής ζωής της μπάρας είναι πολύ μεγάλη;