

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Έστω A_k το γεγονός ότι το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή k . Ο μόνος τρόπος να εμφανιστεί το A_k είναι να επισκεφτεί την S_3 την χρονική στιγμή 0, να μείνει εκεί τις επόμενες $k-2$, και τελικά να επισκεφτεί την S_2 την χρονική στιγμή k . Επομένως,

$$P(A_k) = p_{03} \cdot p_{33}^{k-2} \cdot p_{32} = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1},$$

for $k = 2, 3, \dots$

(β) Έστω A το γεγονός ότι το σύστημα δεν επισκέπτεται την S_4 ποτέ. Υπάρχουν τρεις τρόποι να εμφανιστεί το A . Ο ένας τρόπος είναι εαν γίνει η μετάβαση από το S_0 στο S_1 , ο άλλος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από το S_0 στο S_5 . Οι μεταβάσεις αυτές πραγματοποιούνται με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Τέλος, το A μπορεί να εμφανιστεί εαν η πρώτη μετάβαση είναι από το S_0 στο S_3 και μετά στο S_2 . Η πιθανότητα να μεταβεί από το S_0 στο S_3 είναι $\frac{1}{3}$. Δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε η μετάβαση αυτή, η πιθανότητα μετά να επισκεφτεί την S_2 είναι $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Συνολικά η μετάβαση από το S_0 στο S_3 και μετά στο S_2 γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{9}$. Επομένως, η πιθανότητα να μην επισκεφτεί ποτέ το S_4 είναι $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$.

(γ) $P(\{\text{επίσκεψη στο } S_0 \text{ και έξοδος από το } S_0 \text{ την επόμενη χρονική στιγμή}\})$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{\text{επίσκεψη στο } S_0\})P(\{\text{εγκαταλείπει το } S_0\}|\{\text{βρίσκεται στο } S_0\}) \\ &= \left[\sum_{k=2}^{\infty} P(A_k) \right] \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right] \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

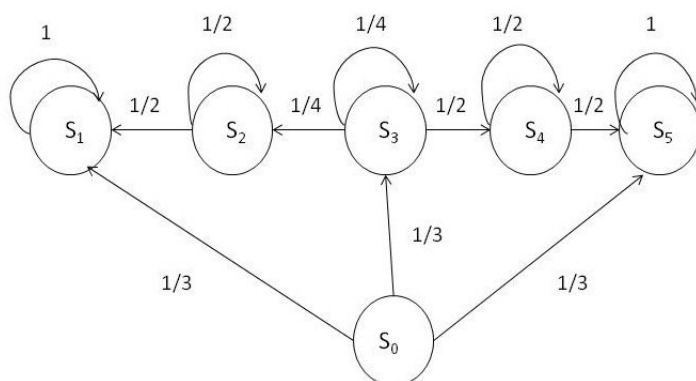
(δ) Το γεγονός αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί εαν γίνουν διαδοχικά οι μεταβάσεις,

$$S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1.$$

Επομένως, $P(\{\text{επισκέπτεται το } S_1 \text{ για πρώτη φορά την χρονική στιγμή } 3\}) = p_{03} \cdot p_{32} \cdot p_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$

(ε) $P(\{\text{επίσκεψη στο } S_3 \text{ μέσω } S_2 \text{ μετά τη χρονική στιγμή } N\})$

$$\begin{aligned} &= P(\{\text{επισκέπτεται το } S_3 \text{ για πρώτη φορά την χρονική στιγμή} \\ &\quad 1 \text{ και μένει εκεί για τις επόμενες } N-1 \text{ χρονικές στιγμές}\}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ για } n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή αλυσίδα θέματος 1, ερώτημα (α).

Άσκηση 2.

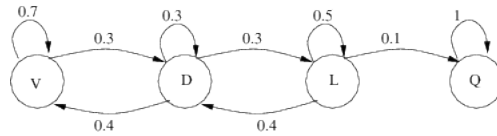
(α)

Ορίζουμε τις εξής 4 καταστάσεις: $\{V : \text{νίκη}, D : \text{ισοπαλία}, L : \text{ήττα}, Q : \text{παραίτηση}\}$. Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο σχήμα 2. Παρατηρώντας το γράφημα βλέπουμε ότι οι καταστάσεις V, D και L είναι όλες μεταβατικές, καθώς από όλες επιτρέπεται η μετάβαση στην Q , αλλά καμία δεν είναι προσιτή από την Q , η οποία είναι και έμμονη. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο παρακάτω:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β)

Έστω X_n η κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας στο τέλος του n -οστού παιχνιδιού. Με χρήση



Σχήμα 2: Μαρκοβιανή αλυσίδα θέματος 2, ερώτημα (α).

του διαγράμματος Markov και των δεσμευμένων πιθανοτήτων έχουμε ότι:

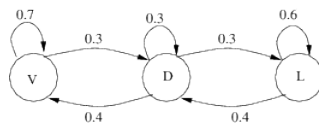
$$\begin{aligned}
 & P(\text{'Η ομάδα τα παρατάει μετά το 3ο παιχνίδι'/'1ο παιχνίδι είναι ισοπαλία'}) \\
 &= P(\text{'3ο παιχνίδι είναι ήττα και η ομάδα τα παρατάει'}/X_1 = D) \\
 &= P(\text{'3ο παιχνίδι είναι ήττα'}/X_1 = D) \cdot P(= / X_3 = L) \\
 &= P(X_3 = L / X_1 = D) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L, X_2 = L / X_1 = D) + P(X_3 = L, X_2 = D / X_1 = D) + \\
 &\quad P(X_3 = L, X_2 = V / X_1 = D)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L / X_2 = L) \cdot P(X_2 = L / X_1 = D) + \\
 &\quad P(X_3 = L / X_2 = D) \cdot P(X_2 = D / X_1 = D) + \\
 &\quad P(X_3 = L / X_2 = V) \cdot P(X_2 = V / X_1 = D)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P_{LL} \cdot P_{DL} + P_{DL} \cdot P_{DD} + P_{VL} \cdot P_{DV}) \cdot P_{LQ} \\
 &= (0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4) \cdot 1 = 0.024
 \end{aligned}$$

Ομοίως, εάν το πρώτο παιχνίδι είναι νικηφόρο:

$$\begin{aligned}
 & P(\text{'Η ομάδα τα παρατάει μετά το 3ο παιχνίδι'/'1ο παιχνίδι είναι νικηφόρο'}) \\
 &= P(X_3 = L / X_1 = V) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L, X_2 = L / X_1 = V) + P(X_3 = L, X_2 = D / X_1 = V) + \\
 &\quad P(X_3 = L, X_2 = V / X_1 = V)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L / X_2 = L) \cdot P(X_2 = L / X_1 = V) + \\
 &\quad P(X_3 = L / X_2 = D) \cdot P(X_2 = D / X_1 = V) + \\
 &\quad P(X_3 = L / X_2 = V) \cdot P(X_2 = V / X_1 = V)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P_{LL} \cdot P_{VL} + P_{DL} \cdot P_{VD} + P_{VL} \cdot P_{VV}) \cdot P_{LQ} \\
 &= (0.5 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.7) \cdot 1 = 0.009
 \end{aligned}$$

δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση η ομάδα τα παρατάει με πιθανότητα μικρότερη κατά 2/3 περίπου.

(γ) Η νέα αλυσίδα φαίνεται στο σχήμα 3 και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο παρακάτω:



Σχήμα 3: Μαρκοβιανή αλυσίδα θέματος 1, ερώτημα (γ).

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Για αυτήν την Μαρκοβιανή αλυσίδα γεννήσεων-θανάτου, οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας δίνουν: Μαζί με την $\pi_V + \pi_D + \pi_L = 1$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \pi_L \cdot P_{LD} &= \pi_D \cdot P_{DL} & \Rightarrow & 0.4\pi_L = 0.3\pi_D \\ \pi_V \cdot P_{VD} &= \pi_D \cdot P_{DV} & & 0.3\pi_V = 0.3\pi_D \end{aligned}$$

$$\pi_L = \frac{9}{37}, \pi_D = \frac{12}{37}, \pi_V = \frac{16}{37}$$

(δ)

Σύμφωνα με την ερμηνεία που δώσαμε στην τάξη:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[\text{πλήθος των ηττών που ακολουθούνται από ισοπαλία σε } n \text{ παιχνίδια}]}{n} &= \pi_L \cdot P_{LD} \\ &= \frac{9}{37} \cdot 0.4 \\ &= \frac{18}{185} = 0.0973 \end{aligned}$$

Ομοίως

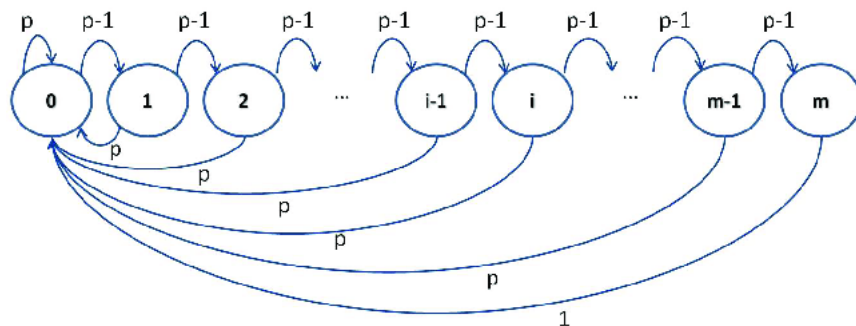
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[\text{πλήθος των νικών που ακολουθούνται από ισοπαλία σε } n \text{ παιχνίδια}]}{n} &= \pi_V \cdot P_{VD} \\ &= \frac{16}{37} \cdot 0.3 \\ &= \frac{24}{185} = 0.1297 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(α) Ορίζουμε $m + 1$ καταστάσεις $\{0, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ ως εξής:

Κατάσταση i : "Η μπάρα βρίσκεται σε λειτουργία για i μέρες" $i = 0, 1, \dots, m$.

Το γράφημα της αλυσίδας είναι:



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(β) Εξισώσεις ισορροπίας: $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$ όπου $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m]$.

Επομένως:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \pi_0 p + \pi_1 p + \dots + \pi_{m-1} p + \pi_m \\ \pi_1 &= \pi_0(1-p) \\ \pi_2 &= \pi_1(1-p) = \pi_0(1-p)^2 \\ \pi_3 &= \pi_2(1-p) = \pi_0(1-p)^3 \\ &\vdots \\ \pi_i &= \pi_{i-1}(1-p) = \pi_0(1-p)^i; \quad i = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}1 &= \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_m = \pi_0 + \pi_0(1-p) + \dots + \pi_0(1-p)^m \\ &= \pi_0 \sum_{i=0}^m (1-p)^i = \pi_0 \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{1 - (1-p)}\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}} \\ \pi_i &= \frac{p(1-p)^i}{1 - (1-p)^{m+1}}; \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

(γ) Μακροπρόθεσμα, η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα ισούται με τη συχνότητα

επισκέψεων της κατάστασης 0 που είναι $\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}$. Καθώς $m \rightarrow \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_0 = p$.

Με άλλα λόγια, για πολύ μεγάλη διάρκεια φυσικής ζωής της μπάρας ($m \rightarrow \infty$), (δηλαδή για καλή ποιότητα του εξαρτήματος), η συχνότητα αντικατάστασής της ισούται με την πιθανότητα p με την οποία ο χρήστης της προκαλεί ζημιά.