

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/12/2013

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/1/2014

Για τις Ασκήσεις 1, 2 και 3, διαβάστε τη θεωρία για τις έννοιες της συνδιασποράς και συσχέτισης από τις σημειώσεις του HY-217 (σελ. 137-142), ή από το βιβλίο των Μπερτσέκα-Τσιτσικλή (σελ. 266-270).

Άσκηση 1. Έστω οι τ.μ. X και Y .

(α) Αν $var(X+2Y) = 40$ και $var(X-2Y) = 20$, ποια είναι η συνδιασπορά, $cov(X, Y)$, των X και Y ;

(β) Υπολογίστε το συντελεστή συσχέτισης, $\rho_{X,Y}$, των X και Y , αν $var(X) = 2var(Y)$.

Άσκηση 2. Έστω οι τ.μ. X και Y .

(α) Αν $var(X+2Y) = var(X-2Y)$, είναι οι X και Y ασυσχέτιστες;

(β) Αν $var(X) = var(Y)$, είναι οι X και Y ασυσχέτιστες;

Άσκηση 3.

(α) Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέσες τιμές $E[X] = 2$, $E[Y] = 4$, διασπορές $var(X) = 9$, $var(Y) = 25$, και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.2$. Ορίζουμε την τ.μ. $W = X + 2Y + 3$. Υπολογίστε: (i) $E[W]$ και $var(W)$, (ii) τη συσχέτιση των X και W , $E[XW]$.

(β) Οι τ.μ. X_1 και X_2 μοντελοποιούν τις παρατηρήσεις ενός σήματος υπό την παρουσία θορύβου, όπως μετρούνται από δύο αισθητήρες ενός ασυρμάτου δικτύου αισθητήρων. Οι X_1 και X_2 έχουν την ίδια μέση τιμή, μ , και διασπορά, σ^2 . Η σηματοθορυβική σχέση (SNR) κάθε παρατήρησης (της X_1 ή της X_2) ορίζεται ως ο λόγος $SNR_X = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$. Ένας μηχανικός συστημάτων επιλέγει να βελτιώσει την ποιότητα των δεδομένων παίρνοντας το μέσο όρο των δύο μετρήσεων: $S = \frac{X_1 + X_2}{2}$.

(β-i) Εκφράστε το $SNR_S = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2}$ της τ.μ. S ως συνάρτηση του SNR_X και του συντελεστή συσχέτισης ρ_{X_1, X_2} μεταξύ των τ.μ. X_1 και X_2 . Δείξτε ότι το SNR_S είναι διπλάσιο από αυτό των παρατηρήσεων, όταν οι X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

(β-ii) Ο μηχανικός παρατηρεί ότι $SNR_S = 1.5 SNR_X$. Σωστά συμπεραίνει ότι οι παρατηρήσεις X_1 και X_2 είναι συσχετισμένες. Υπολογίστε την τιμή του συντελεστή συσχέτισης ρ_{X_1, X_2} .

(β-iii) Για ποιά τιμή του ρ_{X_1, X_2} μπορεί η διαδικασία του μέσου όρου να κάνει το SNR_S αυθαίρετα υψηλό (να το απειρίσει);

Άσκηση 4. Ο Κώστας πηγαίνει στο Las Vegas. Δε θέλει να χάσει πάρα πολλά λεφτά οπότε αποφασίζει να παίζει μόνο με 3\$ και να σταματήσει να παίζει όταν θα τα έχει κάνει 5\$ ή όταν θα τα έχει χάσει όλα. Πλησιάζει μία ρουλέτα η οποία έχει 18 κόκκινες, 18 μαύρες και 2 πράσινες θέσεις. Αποφασίζει ότι πάντα θα ποντάρει 1\$ στο κόκκινο.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του παιχνιδιού του Κώστα. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;

(β) Με τι πιθανότητα θα φύγει ο Κώστας χαρούμενος από το καζίνο; Με τι πιθανότητα θα φύγει χαμένος; Πως μεταβάλλονται αυτές οι πιθανότητες αν αρχίζει το παιχνίδι με 2\$;

(γ) Πόσο θα διαρκέσει η διασκέδαση του Κώστα στη ρουλέτα; Με άλλα λόγια, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών μέχρις ότου χάσει τα λεφτά του ή φύγει με 5\$ στην τσέπη;