

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Έχουμε ότι

$$\text{var}(X + 2Y) = \text{var}(X) + \text{var}(2Y) + 2\text{cov}(X, 2Y) = \text{var}(X) + 4\text{var}(Y) + 4\text{cov}(X, Y) = 40 \quad (1)$$

$$\text{var}(X - 2Y) = \text{var}(X) + \text{var}(2Y) - 2\text{cov}(X, 2Y) = \text{var}(X) + 4\text{var}(Y) - 4\text{cov}(X, Y) = 20 \quad (2)$$

Παίρνοντας τη διαφορά μεταξύ των (1) και (2), έχουμε ότι

$$8\text{cov}(X, Y) = 40 - 20 \rightarrow \text{cov}(X, Y) = 2.5$$

(β) Προσθέτοντας τις (1) και (2), έχουμε ότι

$$2\text{var}(X) + 8\text{var}(Y) = 40 + 20 \rightarrow \text{var}(X) + 4\text{var}(Y) = 30.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση με τη σχέση που μας δίνει η εκφώνηση, $\text{var}(X) = 2\text{var}(Y)$, έχουμε ότι

$$\text{var}(X) = 10, \quad \text{var}(Y) = 5.$$

Συνεπώς,

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} = \frac{2.5}{\sqrt{10 \cdot 5}} = 0.3536.$$

Άσκηση 2.

(α) Έχουμε ότι

$$\text{var}(X + 2Y) = \text{var}(X) + \text{var}(2Y) + 2\text{cov}(X, 2Y) = \text{var}(X) + 4\text{var}(Y) + 4\text{cov}(X, Y) \quad (3)$$

$$\text{var}(X - 2Y) = \text{var}(X) + \text{var}(2Y) - 2\text{cov}(X, 2Y) = \text{var}(X) + 4\text{var}(Y) - 4\text{cov}(X, Y) \quad (4)$$

Καθώς $\text{var}(X + 2Y) = \text{var}(X - 2Y)$, έχουμε ότι $\text{cov}(X, Y) = 0$ και επομένως οι X και Y είναι ασυσχέτιστες.

(β) Όχι. Το ότι δύο τ.μ. μπορεί να έχουν την ίδια διασπορά δεν συνεπάγεται ότι είναι πάντα ασυσχέτιστες!

Άσκηση 3.

(α-i) $P(Z = \alpha) = 0, \quad \forall \alpha.$

(α-ii)

$$\begin{aligned} P(|Z - 3| \geq 1.5) &= P(Z \geq 4.5 \cup Z \leq 1.5) \\ &= P(Z \geq 4.5) + P(Z \leq 1.5) \\ &= 1 - P\left(\frac{Z - (-4)}{3} \leq \frac{4.5 - (-4)}{3}\right) + P\left(\frac{Z - (-4)}{3} \leq \frac{1.5 - (-4)}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{8.5}{3}\right) + \Phi\left(\frac{5.5}{3}\right). \end{aligned}$$

(α-iii)

$$\begin{aligned}
P(Z^2 \leq 16) &= P(-4 \leq Z \leq 4) \\
&= P\left(\frac{-4 - (-4)}{3} \leq \frac{Z - (-4)}{3} \leq \frac{4 - (-4)}{3}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi(0) \\
&= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(β-i) $E[W] = E[X + 2Y + 3] = E[X] + 2E[Y] + 3 = 2 + 2 \cdot 4 + 3 = 13.$

$$\begin{aligned}
\text{var}(W) &= \text{var}(X + 2Y + 3) = \text{var}(X + 2Y) = \text{var}(X) + \text{var}(2Y) + 2\text{cov}(X, 2Y) \\
&= \text{var}(X) + 4\text{var}(Y) + 2 \cdot 2\text{cov}(X, Y) \\
&= \text{var}(X) + 4\text{var}(Y) + 4\rho_{X,Y} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \\
&= 9 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 0.2 \cdot 3 \cdot 5 = 121.
\end{aligned}$$

(β-ii) Συσχέτιση:

$$\begin{aligned}
E[XW] &= E[X(X + 2Y + 3)] \\
&= E[X^2] + 2E[XY] + 3E[X] \\
&= \text{var}(X) + (E[X])^2 + 2(\text{cov}(X, Y) + E[X]E[Y]) + 3E[X] \\
&= 9 + 2^2 + 2(0.2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4) + 3 \cdot 2 = 41.
\end{aligned}$$

(γ-i) $\mu_S = E[S] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \mu$

$$\begin{aligned}
\sigma_S^2 &= \text{var}(S) = \text{var}\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right) = \text{var}\left(\frac{X_1}{2}\right) + \text{var}\left(\frac{X_2}{2}\right) + 2\text{cov}\left(\frac{X_1}{2}, \frac{X_2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\text{var}(X_1) + \frac{1}{4}\text{var}(X_2) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho_{X_1, X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \\
&= \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{2} \rho_{X_1, X_2} \cdot \sigma^2 \\
&= \frac{1}{2}(1 + \rho_{X_1, X_2}) \cdot \sigma^2
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

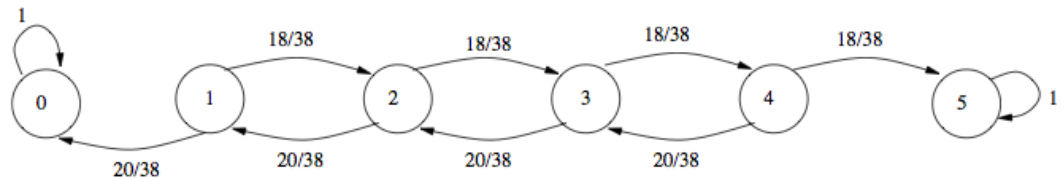
$$SNR_S = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2} = \frac{2}{1 + \rho_{X_1, X_2}} \cdot \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{2}{1 + \rho_{X_1, X_2}} \cdot SNR_X$$

Όταν οι X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες, $\rho_{X_1, X_2} = 0$ και συνεπώς $SNR_S = 2SNR_X$.

(γ-ii) Έχουμε ότι $\frac{2}{1 + \rho_{X_1, X_2}} = 1.5 \Rightarrow \rho_{X_1, X_2} = \frac{1}{3}$.

(γ-iii) Παρατηρούμε ότι καθώς $\rho_{X_1, X_2} \rightarrow -1$ τότε $SNR_S \rightarrow +\infty$. Δηλαδή, αν οι δύο μετρήσεις είναι ισχυρά αρνητικά συσχετισμένες, ο μέσος όρος τους έχει άπειρο SNR .

Άσκηση 4.



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή αλυσίδα Άσκησης 4

(α) Ως κατάσταση του συστήματος ορίζουμε τον αριθμό των δολλαρίων που ο Κώστας έχει στην τσέπη του $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο σχήμα 1 και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο ακόλουθος:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20/38 & 0 & 18/38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20/38 & 0 & 18/38 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20/38 & 0 & 18/38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20/38 & 0 & 18/38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι καταστάσεις 0 και 5 είναι έμμονες, ενώ οι 1, 2, 3, 4 είναι μεταβατικές.

(β) Ζητούμε ουσιαστικά τις πιθανότητες απορροφήσεως του συστήματος από τις καταστάσεις $s = 0$ και $s = 5$, όταν αυτό ξεκινά από τις καταστάσεις $i = 3$ ή $i = 2$ $a_i = P(X_n = s / X_0 = i)$. Έστω ότι $s = 0$ (ο Κώστας φεύγει χαμένος). Οι πιθανότητες απορροφήσεως a_i ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα (σελίδα 75 των σημειώσεων).

$$a_0 = 1, a_5 = 0, a_i = \sum_{j=0}^5 P_{ij} a_j \text{ για } i = 1, 2, 3, 4$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= P_{10} \cdot a_0 + P_{12} \cdot a_2 \\ a_2 &= P_{21} \cdot a_1 + P_{23} \cdot a_3 \\ a_3 &= P_{32} \cdot a_2 + P_{34} \cdot a_4 \\ a_4 &= P_{43} \cdot a_3 + P_{45} \cdot a_5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= \frac{20}{38} \cdot 1 + \frac{18}{38} \cdot a_2 \\ a_2 &= \frac{20}{38} \cdot a_1 + \frac{18}{38} \cdot a_3 \\ a_3 &= \frac{20}{38} \cdot a_2 + \frac{18}{38} \cdot a_4 \\ a_4 &= \frac{20}{38} \cdot a_3 + \frac{18}{38} \cdot 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8398 \\ 0.6618 \\ 0.4640 \\ 0.2442 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η πιθανότητα να φύγει χαμένος από το καζίνο, ενώ έχει μπει μέσα με 3\$ είναι $a_3 = 0.6618$. Αν ξεκινούσε με 2\$ θα έφυγε χαμένος από το καζίνο με πιθανότητα $a_2 = 0.8389$. Καθώς υπάρχουν μόνο δύο έμμονες καταστάσεις, η πιθανότητα το σύστημα να απορροφηθεί από της $s = 5$ (ο Κώστας να φύγει χαρούμενος) είναι:

$$1 - a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1602 \\ 0.3382 \\ 0.5360 \\ 0.7558 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα η πιθανότητα να φύγει χαρούμενος από το καζίνο, ενώ έχει μπει μέσα με 3\$ είναι 0.5360, ενώ αν έχει μπει με 2\$ είναι 0.3382.

(γ) Ζητούμε το μέσο χρόνο απορροφήσεως του συστήματος ξεκινώντας από την κατάσταση $i = 3$, μ_3 (σελίδα 81 των σημειώσεων):

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_5 = 0 \\ \mu_i &= 1 + \sum_{j=0}^5 P_{ij} \mu_j \text{ για } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε λύνοντας το παρακάτω σύστημα βρίσκουμε το μ_3 :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{20}{38} \mu_0 + \frac{18}{38} \mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + \frac{20}{38} \mu_1 + \frac{18}{38} \mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + \frac{20}{38} \mu_2 + \frac{18}{38} \mu_4 \\ \mu_4 &= 1 + \frac{20}{38} \mu_3 + \frac{18}{38} \mu_5 \end{aligned}$$