

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ317 : Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων : Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Προόδου
30 - 11 - 2013

Θέμα 1.

(α) Μεταφορικά μέσα φτάνουν στην πλατεία σύμφωνα με μία *σ.δ. Poisson* με ένταση $\lambda_1 + \lambda_2$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα νέας αρχής της *σ.δ. Poisson*, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος που περνά από τις 7:00 το πρωί έως την πρώτη άφιξη μεταφορικού μέσου ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$.

Συνεπώς το μέσο χρονικό διάστημα που ζητά το ερώτημα είναι :

$$\frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

(β) Το πλήθος των ταξί που φτάνουν στην πλατεία μεταξύ 7:10 και 7:35 ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο $25\lambda_1$. Συνεπώς, το μέσο πλήθος είναι $25\lambda_1$ ταξί.

(γ) Έστω N_{10} το πλήθος των λεωφορείων που φτάνουν στην πλατεία σε διάρκεια 10 λεπτών. Τότε $N_{10} \sim Poisson(10\lambda_2)$. Συνεπώς,

$$P(N_{10} = 3) = \frac{(10\lambda_2)^3}{3!} e^{-10\lambda_2}$$

$$\textbf{(δ)} P(\text{πρώτο όχημα είναι ταξί}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$P(\text{πρώτο όχημα είναι λεωφορείο}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

(ε) $X = W + D$, όπου W είναι το χρονικό διάστημα ως την άφιξη του πρώτου μεταφορικού μέσου και D είναι ο χρόνος της διαδρομής. Προφανώς,

$$W \sim exp(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$D/\text{ταξί} \sim exp(\mu_1)$$

$$D/\text{λεωφ.} \sim exp(\mu_2)$$

Έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} E[X] &= E[W] + E[D] \\ &= E[W] + P(\text{ταξί}) \times E[D/\text{ταξί}] + P(\text{λεωφ.}) \times E[D/\text{λεωφ.}] \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \frac{1}{\mu_2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right). \end{aligned}$$

Επίσης :

$$\begin{aligned} M_X(s) &= M_W(s) \times M_D(s) \\ &= M_W(s) \times [M_{D_T}(s) \times P(\text{ταξί}) + M_{D_\Lambda}(s) \times P(\text{λεωφορείο})] \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - s} \times \left[\frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 - s} \times \left(\frac{\mu_1 \lambda_1}{\mu_1 - s} + \frac{\mu_2 \lambda_2}{\mu_2 - s} \right) \end{aligned}$$

(στ) $Y = Y_1 + Y_2$, όπου $Y_1 = \min(D_T, D_\Lambda)$ είναι ο χρόνος της διαδρομής του οχήματος που φτάνει πρώτο στις Βούτες και Y_2 είναι ο επιπλέον χρόνος από την άφιξη του πρώτου οχήματος έως την άφιξη του δεύτερου οχήματος.

Προφανώς,

$$\begin{aligned} Y_1 &\sim \exp(\mu_1 + \mu_2) \\ Y_2/D_T < D_\Lambda &\sim \exp(\mu_2) \\ Y_2/D_T > D_\Lambda &\sim \exp(\mu_1) \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$E[Y] = E[Y_1] + E[Y_2]$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[Y_1] + E[Y_2/D_T < D_\Lambda] \times P(D_T < D_\Lambda) + E[Y_2/D_T > D_\Lambda] \times P(D_T > D_\Lambda) \\ &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{1}{\mu_2} \times \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \times \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \\ &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \times \left[1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right] \end{aligned}$$

(ζ) Τα εξπρές λεωφορεία περνούν σύμφωνα με μία *Poisson* σ.δ. με ένταση $p\lambda_2$. Συνεπώς, το πλήθος που περνά σε $20min$ ακολουθεί *Poisson* τ.μ. με παράμετρο $20p\lambda_2$ και μέση τιμή $20p\lambda_2$.

(η) Η πιθανότητα ότι ακριβώς i αργά λεωφορεία περνούν πριν φτάσει το K -οστό εξπρές λεωφορείο ισούται με την πιθανότητα ότι το k -οστό εξπρές λεωφορείο είναι το $(k + i)$ -στό λεωφορείο που περνά. Χρησιμοποιώντας την κατανομή *Pascal* τάξης k , η πιθανότητα αυτή είναι:

$$\binom{k+i-1}{k-1} p^k (1-p)^i$$

Η πιθανότητα να περάσουν k εξπρές πριν περάσουν k κανονικά λεωφορεία ισούται με την πιθανότητα ότι το πολύ $k - 1$ κανονικά περνούν πριν περάσει το k -οστό εξπρές λεωφορείο. Συνεπώς,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+i-1}{k-1} p^k (1-p)^i$$

Εναλλακτικά, η πιθανότητα που ζητάμε ισούται με την πιθανότητα να περάσουν k ή περισσότερα εξπρές λεωφορεία στα πρώτα $2k - 1$ λεωφορεία :

$$\sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i (1-p)^{2k-1-i}$$

Θέμα 2.

(α) Το μέσο “κέρδος” του παίχτη μετά από 1000 παρτίδες είναι $1000 \times 100 \times (-0.0029) \text{ €} = -290 \text{ €}$

(β) Το κέρδος του παίκτη μετά από 1000 παρτίδες μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000} ,$$

όπου X_i είναι το κέρδος στην i -οστή παρτίδα. Από την εκφώνηση έχουμε ότι :

$$E[X_i] = 100 \times (-0.0029) = -0.29$$

$$\text{var}(X_i) = 100^2 \times 1.1418^2$$

Συνεπώς,

$$E[S] = 1000 \times E[X_i] = -290$$

$$\sigma_s^2 = \text{var}(S) = 1000 \times \text{var}(X_i) = 1000 \times 100^2 \times 1.1418^2$$

$$\Rightarrow \sigma_s = \sqrt{1000} \times 114.18 = 3610$$

$$P(S > 0) = 1 - P(S \leq 0) = 1 - P\left(\frac{S + 290}{3610} \leq \frac{290}{3610}\right) \\ 1 - \Phi(0.0803) = 1 - 0.5321 = \mathbf{0.4679}$$

(γ) $P(S > 1000) = 1 - P(S \leq 1000) = 1 - P\left(\frac{S + 290}{3610} \leq \frac{1000 + 290}{3610}\right) \\ 1 - \Phi(0.3573) = 1 - 0.6398 = \mathbf{0.3602}$

(δ) Τώρα, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ και ζητάμε να ισχύει $P(S_n > 0) = 0.4$.

$$E[S_n] = -0.29 \times n, \quad \text{var}(S_n) = n \times 100^2 \times 1.1418^2$$

$$P(S_n > 0) = 1 - P(S_n \leq 0) = 1 - P\left(\frac{S_n + 0.29n}{114.18\sqrt{n}} \leq \frac{0.29n}{114.18\sqrt{n}}\right) = 0.4$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{0.29n}{114.18\sqrt{n}}\right) = 0.6 = \Phi(0.253)$$

$$\Rightarrow \frac{0.29n}{114.18\sqrt{n}} = 0.253$$

$$\Rightarrow n = \mathbf{9923}$$