

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες -Εαρινό Εξάμηνο 2016

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1. (Συνδιασπορά τυχαίων μεταβλητών)

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω:

- $E[X] = 5$
- $E[X^2] = 27.4$
- $E[Y] = 7$
- $E[Y^2] = 51.4$
- $\text{var}(X + Y) = 8$

Να υπολογισθεί η συνδιασπορά των τυχαίων μεταβλητών $W = X + Y$ και $Z = X + 1.2Y$

Άσκηση 2. (Συνδιασπορά τυχαίων μεταβλητών)

Έστω $X_1, X_2, \dots$ αριθμήσιμα άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, όμοια κατανε-
μημένων, με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές:

$Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$, $n = 1, 2, \dots$. Για κάθε $k \geq 0$, να υπολογισθούν οι συνδιασπορές $\text{cov}(Y_n, Y_{n+k})$.

Άσκηση 3. (Ροπογεννήτριες συναρτήσεις)

Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_X(s) = \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8}$$

(α) Να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ X καθώς και η πιθανότητα:
 $P(X \geq 0.5)$

(β) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ X , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της X

Άσκηση 4. (Ροπογεννήτριες συναρτήσεις)

Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_X(s) = e^{3s+8s^2}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή Z , η οποία ορίζεται ως: $Z = \frac{1}{4}(X - 3)$

(α) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της τ.μ Z

(β) Να βρεθεί η μέση τιμή της τ.μ Z

(γ) Να βρεθεί η διασπορά της τ.μ Z

Άσκηση 5. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Το μήκος σε μέτρα ενός τμήματος μια σωλήνας είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 2$.

(α) Έστω ότι λαμβάνουμε 400 τέτοια τμήματα σωλήνων. Υπολογίστε ένα όριο w , τέτοιο ώστε το συνολικό μήκος 400 τμημάτων να είναι μεγαλύτερο από το w , με πιθανότητα 0.841

(β) Υπολογίστε το πλήθος n των τμημάτων που απαιτούνται ώστε η πιθανότητα να κατασκευάσουμε μια σωλήνα συνολικού μήκους τουλάχιστον 200, να είναι 0.841.

Άσκηση 6. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Ένας μεγάλος ανελκυστήρας εμπορευμάτων μπορεί να μεταφέρει αντικείμενα, μέγιστου βάρους 9800 κιλών. Υποθέστε ότι θέλετε να μεταφέρετε ένα φορτίο που αποτελείται από 49 κουτιά. Το βάρος των κουτιών ακολουθεί μια κατανομή με μέση τιμή $\mu = 205$ κιλά και τυπική απόκλιση $\sigma = 15$ κιλά. Βασισμένοι σε αυτή την πληροφορία, ποια είναι η πιθανότητα να μεταφερθούν με ασφάλεια και τα 49 κιλά μέσω του ανελκυστήρα;

Άσκηση 7. (Ανισότητες - Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι ρίχνεται n φορές. Έστω X_i , το αποτέλεσμα της i -οστής ρίψης. Υποθέτουμε ότι οι τ.μ X_i είναι ανεξάρτητες και ορίζουμε το άθροισμα των ρίψεων: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Υπολογίστε ένα άνω όριο για την πιθανότητα $P(S_{100} \geq 400)$.

(α) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα *Markov*.

(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα *Chebyshev*.

(γ) Χρησιμοποιώντας προσέγγιση με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 8. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Σε αυτή την άσκηση σας ζητείται να προσομοιώσετε μια εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, χρησιμοποιώντας το Matlab. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

1. Δημιουργείτε $N = 1000$ ψευδοτυχαία δείγματα μιας ομοιόμορφης τ.μ. X_1 στο διάστημα $[0, 1]$.
2. Απεικονίστε το ιστόγραμμα της τ.μ. X_1 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `hist` για $n_bins = 20$.
3. Δημιουργείτε $N = 1000$ ψευδοτυχαία δείγματα από $n = 20$ ομοιόμορφες τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ στο διάστημα $[0, 1]$.
4. Θεωρείστε το δειγματικό μέσο όρο τους $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ και απεικονίστε το ιστόγραμμα του για 20 bins. Τι παρατηρείτε;
5. Ορίστε την τ.μ. $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ και δώστε το ιστόγραμμά της για 20 bins. Άλλαξε κάτι στην κατανομή;
(Υπενθύμιση: Για ομοιόμορφες τ.μ. έχουμε $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $var = \frac{1}{12}(a-b)^2$, όπου a, b τα όρια του δοθέντος διαστήματος.)
6. Παιζτε' με τις μεταβλητές N , n_bins και n και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας σε κάθε περίπτωση. Τι αλλάζει στην κατανομή; Υπάρχουν αλλαγές στη διασπορά; Δώστε τα αντίστοιχα ιστογράμματα. (Π.χ. $N = 10000, n_bins = 100, n = 100$.)

Παραθέστε τον κώδικά σας, τα ζητούμενα ιστογράμματα και μια μικρή αναφορά με τις παρατηρήσεις σας για τα αποτελέσματα.