

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες -Εαρινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

2η Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/03/2016

Ημερομηνία Παράδοσης: 6/4/2016

Άσκηση 1.

Ένας εργάτης κάθεται μπροστά από έναν ταινιόδρομο (conveyor belt) και πρέπει να αφαιρεί από αυτόν αντικείμενα καθώς αυτά περνούν από μπροστά του. Παρατηρεί ότι η πιθανότητα με την οποία ακριβώς k αντικείμενα φτάνουν σε ένα λεπτό δίδεται από

$$p_K(k) = \frac{2^k \cdot e^{-2}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

και συνεπώς υποθέτει ότι οι αφίξεις ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία Poisson.

- α') Αν θελήσει να το σκάσει για λίγο για να κάνει ένα τσιγάρο, πόσο χρόνο μπορεί να λείψει ώστε ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που θα περάσουν χωρίς συλλογή να είναι μικρότερος από 8;
- β') Αν λείπει για 2 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα χάσει ακριβώς 2 αντικείμενα στο πρώτο λεπτό και ακριβώς 1 αντικείμενο στο δεύτερο λεπτό;
- γ') Αν λείπει για 2 λεπτά ποια είναι η πιθανότητα ότι θα χάσει ακριβώς 4 αντικείμενα;
- δ') Ένα κουδούνι χτυπά μια φορά κάθε λεπτό της ώρας. Αν μεταξύ δύο διαδοχικών χτύπων εμφανίζονται περισσότερα του ενός αντικείμενα, ο εργάτης μπορεί να χειριστεί επιτυχώς τρία μόνο από αυτά καταστρέφοντας τα υπόλοιπα. Ποιο είναι το ποσοστό των αντικειμένων που καταστρέφονται;

Άσκηση 2.

Ο Δημήτρης αποτυγχάνει στα διαγωνίσματα με πιθανότητα $1/4$, ανεξάρτητα από άλλα διαγωνίσματα.

- α') Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Δημήτρης αποτυγχάνει σε ακριβώς δύο από τα επόμενα έξι διαγωνίσματα;
- β') Ποιος είναι ο μέσος αριθμός διαγωνισμάτων που ο Δημήτρης θα έχει περάσει πριν αποτύχει τρεις φορές;
- γ') Ποια είναι η πιθανότητα ότι η δεύτερη και τρίτη φορά που ο Δημήτρης αποτυγχάνει σε ένα διαγώνισμα είναι όταν δίνει το όγδοο και ένατο διαγώνισμα, αντιστοίχως;
- δ') Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Δημήτρης αποτυγχάνει σε δύο διαγωνίσματα στη σειρά πριν περάσει δύο διαγωνίσματα στη σειρά;

Άσκηση 3.

Θεωρήστε μια διαδικασία Bernoulli με παράμετρο p .

- α') Συσχετίστε τον αριθμό αποτυχιών πριν την r -οστή επιτυχία (που ονομάζεται συχνά αρνητική διωνυμική τυχαία μεταβλητή) με μια Pascal τυχαία μεταβλητή και βρείτε την $\sigma.π.π.$ της.
- β') Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά του αριθμού των αποτυχιών πριν την r -οστή επιτυχία.
- γ') Βρείτε την πιθανότητα ότι η i -οστή αποτυχία συμβαίνει πριν την r -οστή επιτυχία.

Άσκηση 4.

Ένας ψαράς πιάνει ψάρια σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 0.6$ ανά ώρα. Ο ψαράς αρχικά ψαρεύει για δύο ώρες. Εάν πιάσει τουλάχιστον ένα ψάρι, σταματάει. Διαφορετικά, συνεχίζει μέχρι να πιάσει τουλάχιστον ένα ψάρι.

- α') Βρείτε την πιθανότητα ότι θα μείνει για περισσότερο από δύο ώρες.
- β') Βρείτε την πιθανότητα ότι ο συνολικός χρόνος που περνάει ψαρεύοντας είναι μεταξύ 2 και 5 ωρών.
- γ') Βρείτε την πιθανότητα ότι πιάνει τουλάχιστον δύο ψάρια.
- δ') Βρείτε το μέσο αριθμό ψαριών που πιάνει.
- ε') Βρείτε το μέσο συνολικό χρόνο ψαρέματος, δεδομένου ότι ήδη ψαρεύει για 4 ώρες.

Άσκηση 5.

- α') Λεωφορεία αναχωρούν από το Ηράκλειο για τα Χανιά, ένα κάθε ώρα. Επιβάτες φτάνουν στο πρακτορείο σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία ($\sigma.δ.$) Poisson με ρυθμό λ επιβάτες την ώρα. Βρείτε το μέσο αριθμό επιβατών σε ένα λεωφορείο (αγνοήστε την πραγματικότητα της περιορισμένης χωρητικότητας του λεωφορείου).
- β') Για τη συνέχεια του προβλήματος υποθέτουμε ότι τα λεωφορεία δε λειτουργούν με προκαθορισμένο πρόγραμμα δρομολογίων αλλά ότι οι χρόνοι μεταξύ των αναχωρήσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικά κατανομημένες τ.μ. με παράμετρο μ . Επίσης, η $\sigma.δ.$ των λεωφορείων είναι ανεξάρτητη της $\sigma.δ.$ αφίξεων των επιβατών. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.π.π.$) του αριθμού των αναχωρήσεων των λεωφορείων στη διάρκεια μιας ώρας.
- γ') Ορίζουμε τώρα ως 'γεγονός' την άφιξη ενός επιβάτη ή την αναχώρηση ενός λεωφορείου. Βρείτε τον αναμενόμενο αριθμό 'γεγονότων' που συμβαίνουν σε μια ώρα.
- δ') Αν ένας επιβάτης φτάσει στο πρακτορείο και δει ότι 2 άνθρωποι ήδη περιμένουν, υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής του μέχρι την αναχώρηση του επόμενου λεωφορείου.
- ε') Υπολογίστε τη $\sigma.π.π.$ του αριθμού των επιβατών σε ένα λεωφορείο.

Άσκηση 6.

Δύο πελάτες A και B υποβάλλουν εργασίες σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς α και β εργασίες ανά ώρα, αντίστοιχα.

- α') Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς οκτώ από τις επόμενες δώδεκα εργασίες να προέρχονται από τον πελάτη A.
- β') Υπολογίστε την πιθανότητα υποβολής επτά εργασιών κατά τη διάρκεια t ωρών.
- γ') Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. M του πλήθους των εργασιών που υποβάλλονται από τον πελάτη A έως και το χρόνο υποβολής της 6ης εργασίας από τον πελάτη B.

Το πλήθος των προγραμμάτων σε κάθε υποβληθείσα εργασία μπορεί να είναι 2 ή 3 ή 4 με ίση πιθανότητα $1/3$. Το πλήθος των προγραμμάτων σε κάθε εργασία είναι ανεξάρτητο από κάθε άλλη εργασία καθώς και από τον πελάτη από τον οποίο προέρχεται η εργασία.

- δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι οι πρώτες 4 εργασίες περιέχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό προγραμμάτων.
- ε) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X , του χρονικού διαστήματος μέχρι τη λήψη 5 εργασιών με 3 προγράμματα η καθεμία από τον πελάτη Α.

Άσκηση 7.

Φορτώνετε n πακέτα, καθένα ανεξάρτητα, είτε σε ένα κόκκινο φορτηγό (με πιθανότητα p) είτε σε ένα πράσινο φορτηγό (με πιθανότητα $1 - p$). Έστω R ο συνολικός αριθμός αντικειμένων που έχουν επιλεγεί για το κόκκινο φορτηγό και έστω G ο συνολικός αριθμός αντικειμένων που επιλέγονται για το πράσινο φορτηγό.

- α) Προσδιορίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής R .
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το πρώτο πακέτο προς φόρτωση καταλήγει να είναι το μόνο στο φορτηγό του.
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα φορτηγό καταλήγει να έχει συνολικά ακριβώς ένα πακέτο.