

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες -Εαρινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- α') Εφόσον οι αφίξεις ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$ ανά λεπτό, ο μέσος αριθμός αντικειμένων που θα περάσουν σε t λεπτά είναι $2t$. Για να είναι ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που θα περάσουν χωρίς συλλογή μικρότερος από 8, τότε αρκεί

$$2t \leq 8 \Leftrightarrow t \leq 4.$$

- β') Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των αφίξεων αντικειμένων κάθε λεπτό, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p_K(2) \cdot p_K(1) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \cdot \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = \frac{2^3 3^{-4}}{2}.$$

- γ') Ο αριθμός των αφίξεων σε ένα διάστημα 2 λεπτών είναι μια Poisson στοχαστική διαδικασία με παράμετρο $2\lambda = 4$. Επομένως, η πιθανότητα 4 αφίξεων σε 2 λεπτά είναι:

$$p_K(4) = \frac{(2\lambda)^4 e^{-2\lambda}}{4!} = \frac{4^4 e^{-4}}{4!}.$$

- δ') Ο εργάτης μπορεί να χειριστεί επιτυχώς τρία αντικείμενα. Επομένως, ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που μπορεί να χειριστεί επιτυχώς ο εργάτης σε ένα λεπτό είναι:

$$\begin{aligned} p_K(1) + 2p_K(2) + 3(p_K(3) + p_K(4) + \dots) &= \\ p_K(1) + 2p_K(2) + 3(1 - p_K(0) + 1 - p_K(1) + 1 - p_K(2)) &= \\ 3 - 3p_K(0) - 2p_K(1) - p_K(2) &= \\ 3 - 9e^{-2}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που δε μπόρεσε να χειριστεί επιτυχώς ο εργάτης ισούται με:

$$\lambda - 3 + 9e^{-2} = 9e^{-2} - 1.$$

Όμως $\lambda = 2$, επομένως το ποσοστό των αντικειμένων που καταστρέφονται είναι $\frac{9e^{-2}-1}{2}$.

Άσκηση 2.

- α') Τα διαγωνίσματα στα οποία αποτυγχάνει ο Δημήτρης ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία Bernoulli με παράμετρο $p = \frac{1}{4}$. Ο αριθμός των $k = 2$ αποτυχιών σε $n = 6$ ανεξάρτητα διαγωνίσματα ορίζεται ως μια Διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους p, n και η ζητούμενη πιθανότητα δίδεται ως:

$$p_K(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = \frac{6!}{4!2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

- β') Ο αναμενόμενος μέσος αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι την τρίτη αποτυχία είναι η μέση τιμή μιας Pascal τυχαίας μεταβλητής Y_k τάξεως $k = 3$ με παράμετρο $p = \frac{1}{4}$:

$$E[Y_k] = \frac{k}{p} = \frac{3}{1/4} = 12.$$

Αφαιρώντας τον αριθμό των αποτυχιών, έχουμε ότι ο αναμενόμενος αριθμός των διαγωνισμάτων που θα έχει περάσει ο Δημήτρης πριν αποτύχει τρεις φορές θα είναι τελικά $12 - 3 = 9$ διαγωνίσματα.

γ') Το γεγονός που μας ενδιαφέρει είναι η τομή των ακόλουθων τριών ανεξάρτητων γεγονότων:

$$A = \{\text{Ο Δημήτρης αποτυγχάνει σε ακριβώς 1 από τα 7 πρώτα διαγωνίσματα}\}$$

$$B = \{\text{Ο Δημήτρης αποτυγχάνει στο 8}^\circ \text{ διαγώνισμα}\}$$

$$\Gamma = \{\text{Ο Δημήτρης αποτυγχάνει στο 9}^\circ \text{ διαγώνισμα}\}$$

Έχουμε

$$P(A) = \binom{7}{1} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^6, \quad P(B) = P(\Gamma) = \frac{1}{4},$$

έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = 7 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^6.$$

δ') Έστω Δ το γεγονός ότι ο Δημήτρης αποτυγχάνει σε δύο διαγωνίσματα στη σειρά πριν περάσει δύο διαγωνίσματα στη σειρά. Έστω E τα διαγωνίσματα που έχει περάσει και A τα διαγωνίσματα στα οποία έχει αποτύχει αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(\Delta) &= P(AA \cup EAA \cup AEAA \cup EAEAA \cup AEAEAA \cup EAEAEAA \cup \dots) \\ &= P(AA) + P(EAA) + P(AEAA) + P(EAEAA) + P(AEAEAA) \\ &\quad + P(EAEAEAA) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &\quad + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \\ &= \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right] \\ &\quad + \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Έτσι, $P(\Delta)$ είναι το άθροισμα δύο άπειρων γεωμετρικών σειρών και

$$P(\Delta) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{7}{52}.$$

Άσκηση 3.

α') Έστω Y ο αριθμός των επαναλήψεων πριν την r -οστή επιτυχία, μια Pascal τυχαία μεταβλητή τάξεως r . Έστω, X ο αριθμός των επιτυχιών πριν την r -οστή επιτυχία, ώστε $X = Y - r$. Επομένως, $p_X(k) = p_Y(k+r)$ και

$$p_X(k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

β) Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του μέρους **(α)**, έχουμε:

$$E[X] = E[Y] - r = \frac{r}{p} - r = \frac{(1-p)r}{p}.$$

Επιπλέον,

$$\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \frac{(1-p)r}{p^2}.$$

γ) Έστω ξανά X ο αριθμός των αποτυχιών πριν την r -οστή επιτυχία. Η i -οστή αποτυχία συμβαίνει πριν από την r -οστή επιτυχία εάν και μόνο εάν $X \geq i$. Επομένως, η επιθυμητή πιθανότητα ισούται με

$$\sum_{k=i}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ένας εναλλακτικός τύπος αποδεικνύεται ως ακολούθως. Θεωρήστε τις πρώτες $r+i-1$ δοκιμές. Ο αριθμός των αποτυχιών σε αυτές τις δοκιμές είναι τουλάχιστον i εάν και μόνο εάν ο αριθμός των επιτυχιών είναι μικρότερος του r . Αλλά αυτό είναι ισοδύναμο με την i -οστή αποτυχία να συμβαίνει πριν την r -οστή επιτυχία. Άρα, η επιθυμητή πιθανότητα είναι η πιθανότητα ότι ο αριθμός των επιτυχιών σε $r+i-1$ δοκιμές είναι μικρότερος του r , η οποία είναι:

$$\sum_{k=0}^{r-1} \binom{r+i-1}{k} p^k (1-p)^{r+i-1-k}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Άσκηση 4.

α) Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει άφιξη για 2 ώρες. Δίδεται από:

$$P(0, 2) = e^{-0.6 \cdot 2} = 0.301.$$

Εναλλακτική λύση: Αυτή είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη άφιξη έρχεται μετά από 2 ώρες:

$$P(T_1 > 2) = \int_2^{\infty} f_{T_1}(t) dt = \int_2^{\infty} 0.6 e^{-0.6t} dt = e^{-0.6 \cdot 2} = 0.301.$$

β) Αυτή είναι η πιθανότητα μηδενικών αφίξεων στο διάστημα $[0, 2)$ και τουλάχιστον μιας άφιξης στο διάστημα $[2, 5]$. Εφόσον αυτά τα δύο χρονικά διαστήματα είναι μη επικαλυπτόμενα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων αυτών των γεγονότων, που δίδεται από:

$$P(0, 2) \cdot (1 - P(0, 3)) = e^{-0.6 \cdot 2} \cdot (1 - e^{-0.6 \cdot 3}) = 0.251.$$

Εναλλακτική λύση: Το ζητούμενο γεγονός μπορεί να εκφραστεί και ως $\{2 \leq T_1 \leq 5\}$ και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$\int_2^5 f_{T_1}(t) dt = \int_2^5 0.6 e^{-0.6t} dt = e^{-0.6 \cdot 2} - e^{-0.6 \cdot 5} = 0.251.$$

γ) Αν πιάσει τουλάχιστον δύο ψάρια, πρέπει να έχει φανεί για ακριβώς δύο ώρες. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα ότι ο αριθμός των ψαριών που πιάνονται κατά τις πρώτες δύο ώρες είναι τουλάχιστον 2, δηλαδή:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(k, 2) = 1 - P(0, 2) - P(1, 2) = 1 - e^{-0.6 \cdot 2} - (0.6 \cdot 2)e^{-0.6 \cdot 2} = 0.337.$$

Εναλλακτική λύση: Το γεγονός που μας ενδιαφέρει συμβαίνει αν και μόνο αν ο χρόνος Y_2 της δεύτερης άφιξης είναι λιγότερος ή ίσος με 2. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y_2 \leq 2) = \int_0^2 f_{Y_2}(y) dy = \int_0^2 (0.6)^2 y e^{-0.6y} dy.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας κατά μέρη, όμως αυτός ο υπολογισμός είναι πιο περίπλοκος σε σχέση με την πρώτη λύση.

- δ)** Ο μέσος αριθμός των ψαριών που πιάνει είναι ίσος με τον αναμενόμενο αριθμό των ψαριών που πιάνονται κατά τις πρώτες δύο ώρες (που είναι $2\lambda = 2 \cdot 0.6 = 1.2$), συν τη μέση τιμή του αριθμού N των ψαριών που πιάνονται μετά τις δύο πρώτες ώρες. Έχουμε $N = 0$ αν ο ψαράς σταματήσει να ψαρεύει στις δύο ώρες και $N = 1$ αν συνεχίσει να ψαρεύει και μετά το πέρας των δύο ωρών. Το γεγονός $\{N = 1\}$ συμβαίνει αν και μόνο αν δεν πιαστούν καθόλου ψάρια κατά τις πρώτες δύο ώρες, έτσι ώστε $E[N] = P(N = 1) = P(0, 2) = 0.301$. Άρα, ο μέσος αριθμός των ψαριών που πιάνονται είναι

$$1.2 + 0.301 = 1.501.$$

- ε')** Δεδομένου ότι ο ψαράς ήδη ψαρεύει για 4 ώρες, ο μελλοντικός χρόνος ψαρέματος είναι ο χρόνος μέχρι να πιαστεί το πρώτο ψάρι. Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας Poisson, ο μελλοντικός χρόνος είναι εκθετικός με μέση τιμή $1/\lambda$. Επομένως, ο μέσος συνολικός χρόνος ψαρέματος είναι:

$$4 + \frac{1}{0.6} = 5.667.$$

Άσκηση 5.

- α')** Ο αριθμός των ανθρώπων που φθάνουν μέσα σε μια ώρα ακολουθεί την κατανομή Poisson με ρυθμό λ και αναμενόμενη τιμή ίση με λ .
- β')** Αν οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων για τα λεωφορεία είναι εκθετικά κατανεμημένοι, τότε οι αναχωρήσεις λεωφορείων σχηματίζουν μια Poisson διαδικασία με ρυθμό μ . Άρα, ο αριθμός των αναχωρήσεων μέσα σε μια ώρα έχει μια Poisson συνάρτηση πιθανότητας με παράμετρο μ .
- γ')** Ενώνουμε δυο ανεξάρτητες Poisson διαδικασίες και προκύπτει μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\mu + \lambda$. Επομένως, ο αναμενόμενος αριθμός των 'γεγονότων' που θα συμβούν σε μια ώρα είναι $\mu + \lambda$.
- δ')** Ο αριθμός των ανθρώπων που περιμένουν άγει ορισμένη πληροφορία για το χρόνο από την τελευταία αναχώρηση. Από την άλλη πλευρά, εξαιτίας της απώλειας μνήμης της εκθετικής κατανομής, ο αριθμός αυτός είναι ανεξάρτητος του χρόνου έως την επόμενη αναχώρηση. Άρα, ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής είναι απλώς $\frac{1}{\mu}$, ανεξαρτήτως του πλήθους των ανθρώπων που περιμένουν.
- ε')** Κάθε γεγονός στο πρακτορείο έχει πιθανότητα $\lambda/(\lambda+\mu)$ να είναι άφιξη επιβάτη ('αποτυχία') και πιθανότητα $\mu/(\lambda+\mu)$ να είναι άφιξη λεωφορείου ('επιτυχία'). Επιπλέον, διαφορετικά γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Ο αριθμός των επιβατών σε ένα λεωφορείο είναι ίσος με τον αριθμό των αποτυχιών έως την πρώτη επιτυχία και είναι κατανεμημένος ως $K - 1$, όπου K είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\mu/(\lambda+\mu)$. Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των επιβατών σε ένα λεωφορείο θα είναι:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Άσκηση 6.

α') Θεωρώντας ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα δ έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\text{εργασία από A}\} \mid \{\text{υποβάλλεται κάποια εργασία}\}) \\ &= \frac{P(\text{υποβάλλεται εργασία από τον A})}{P(\text{υποβάλλεται κάποια εργασία})} \\ &= \frac{\alpha\delta}{(\alpha + \beta)\delta} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$P(\text{ακριβώς 8 από τις επόμενες 12 εργασίες από τον A}) = \binom{12}{8} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^8 \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^4$$

β') Το ερώτημα αφορά τη συνδυασμένη διαδικασία υποβολής εργασιών από τους πελάτες A και B, η οποία έχει ρυθμό $\alpha + \beta$. Με άλλα λόγια, ζητείται η πιθανότητα $P(7, t)$ για ρυθμό $\lambda = \alpha + \beta$, η οποία είναι:

$$\frac{((\alpha + \beta)t)^7 e^{-(\alpha + \beta)t}}{7!}$$

γ') Χρησιμοποιώντας τη συνδυασμένη διαδικασία έχουμε:

$\{M = m\} = \{m \text{ υποβολές από τον A σε σύνολο } m + 5 \text{ υποβολών ΚΑΙ η } (m + 6)\text{-η υποβολή είναι από τον B}\}.$

Από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης της διαδικασίας Poisson προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P(M = m) &= P(m \text{ υποβολές από τον A σε σύνολο } m + 5 \text{ υποβολών}) \times \\ &\times P(\text{η } (m + 6)\text{-η υποβολή είναι από τον B}) \end{aligned}$$

$$p_M(m) = \binom{m+5}{m} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^6 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Για την εύρεση της μέσης τιμής και της διασποράς της M μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας την PMF που υπολογίσαμε προηγουμένως, είτε να παρατηρήσουμε ότι:

$$M = X_1 + X_2 + \dots + X_6$$

όπου X_i είναι τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των υποβολών του A μεταξύ της $(i-1)$ -οστής και i -οστής υποβολής του B. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι X_i είναι i.i.d. τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή μετατοπισμένη κατά 1, με παράμετρο $p = 1 - P(A) = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$.

Άρα,

$$E[M] = 6E[X] = 6 \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta} - 1 \right) = \frac{6\alpha}{\beta}, \quad \text{var}(M) = 36\text{var}(X) = \frac{36\alpha(\alpha + \beta)}{\beta^2}$$

δ') $P(\text{υποβολή εργασίας με 2 προγράμματα}) = P(\text{υποβολή εργασίας με 3 προγράμματα}) = P(\text{υποβολή εργασίας με 4 προγράμματα}) = \frac{1}{3}.$

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν ίδιο αριθμό προγραμμάτων}) &= \\ P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν 2 προγράμματα}) + \\ P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν 3 προγράμματα}) + \\ P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν 4 προγράμματα}) &= \\ 3 \left(\frac{1}{3}\right)^4 &= \\ \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

ε') Μπορούμε να φτάσουμε εύκολα στην απάντηση του ερωτήματος χρησιμοποιώντας διαίρεση της διαδικασίας Poisson. Δημιουργούμε μια νέα διαίρεση της διαδικασίας του πελάτη A, οι αφίξεις της οποίας αντιστοιχούν σε εργασίες του A που περιλαμβάνουν 3 προγράμματα. Η νέα διαδικασία έχει ρυθμό:

$$P(\text{η εργασία έχει 3 προγράμματα}) \times (\text{αρχικός ρυθμός}) = \frac{1}{3}\alpha.$$

οπότε η X είναι Erlang τυχαία μεταβλητή 5ης τάξης με παράμετρο $(\frac{1}{3}\alpha)$ και συνεπώς, η PDF της είναι:

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{3}\alpha\right)^5 x^4 e^{-\frac{1}{3}\alpha x}}{4!}, \quad x \geq 0.$$

Άσκηση 7.

α') Η τυχαία μεταβλητή R είναι Διωνυμική με παραμέτρους p, n . Συνεπώς,

$$p_R(r) = \binom{n}{r} (1-p)^{n-r} p^r, \quad \text{για } r = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$E[R] = np \quad \text{και} \quad \text{var}(R) = np(1-p).$$

β') Έστω A το γεγονός ότι το πρώτο αντικείμενο που θα φορτωθεί καταλήγει να είναι το μοναδικό στο φορτηγό του. Το γεγονός αυτό αποτελεί την ένωση δύο ανεξάρτητων γεγονότων:

- (i) Το πρώτο αντικείμενο τοποθετείται στο κόκκινο φορτηγό και τα υπόλοιπα $n-1$ τοποθετούνται στο πράσινο φορτηγό.
- (ii) Το πρώτο αντικείμενο τοποθετείται στο πράσινο φορτηγό και τα υπόλοιπα $n-1$ τοποθετούνται στο κόκκινο φορτηγό.

Τότε,

$$P(A) = p(1-p)^{n-1} + (1-p)p^{n-1}.$$

γ') Έστω B το γεγονός ότι τουλάχιστον ένα φορτηγό καταλήγει με ακριβώς μόνο ένα πακέτο. Το γεγονός B συμβαίνει εάν ακριβώς ένα ή και τα δύο φορτηγά καταλήξουν με ακριβώς ένα πακέτο, άρα:

$$P(B) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ 2p(1-p), & \text{αν } n = 2 \\ \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p + \binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p), & \text{αν } n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$