

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες -Εαρινό Εξάμηνο 2016

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

3η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Μία καθηγήτρια δίνει διαγωνίσματα τα οποία είναι δύσκολα, μέτρια και εύκολα. Εάν δώσει ένα δύσκολο διαγώνισμα, το επόμενο διαγώνισμα θα είναι είτε μέτριο είτε εύκολο με ίση πιθανότητα. Ωστόσο, εάν δώσει ένα εύκολο ή μέτριο διαγώνισμα υπάρχει πιθανότητα 0.5 ότι το επόμενο διαγώνισμα θα είναι της ίδιας δυσκολίας και 0.25 πιθανότητα για καθένα από τα άλλα επίπεδα δυσκολίας. Κατασκευάστε μια κατάλληλη αλυσίδα Markov, δώστε τον πίνακα πιθανοτήτων και βρείτε τις στατικές πιθανότητες.

Άσκηση 2.

Θεωρήστε μια αλυσίδα Markov με καταστάσεις $1, 2, \dots, 9$ και τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης: $p_{12} = p_{17} = \frac{1}{2}$, $p_{i(i+1)} = 1$ για $i \neq 1, 6, 9$ και $p_{61} = p_{91} = 1$. Είναι η επαναληπτική κλάση της αλυσίδας περιοδική ή όχι και εάν ναι ποια είναι ο περίοδός της;

Άσκηση 3.

Η απόδοση της ομάδας ποδοσφαίρου του ΟΦΗ είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ηθικό των παικτών της: Το αποτέλεσμα ενός παιχνιδιού εξαρτάται από αυτό του προηγούμενου. Συγκεκριμένα, όταν η ομάδα κερδίζει ένα παιχνίδι, τότε είτε κερδίζει και το επόμενο με πιθανότητα 0.7, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3. Όταν φέρνει ισοπαλία, τότε είτε κερδίζει το επόμενο παιχνίδι με πιθανότητα 0.4, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3, είτε χάνει με πιθανότητα 0.3. Τέλος, όταν χάνει ένα παιχνίδι, τότε είτε χάνει και το επόμενο με πιθανότητα 0.5, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.4, είτε απογοητεύεται τελείως και σταματά να παίζει με πιθανότητα 0.1.

α') Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με το μικρότερο αριθμό καταστάσεων που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη των παιχνιδιών της ομάδας. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;

β') Αν το αποτέλεσμα του πρώτου παιχνιδιού είναι ισοπαλία, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι η ομάδα θα τα παρατήσει και θα σταματήσει να παίζει αμέσως μετά το τρίτο παιχνίδι; Υπολογίστε την ίδια πιθανότητα δεδομένου ότι η ομάδα νικάει στο πρώτο παιχνίδι. Τι παρατηρείτε;

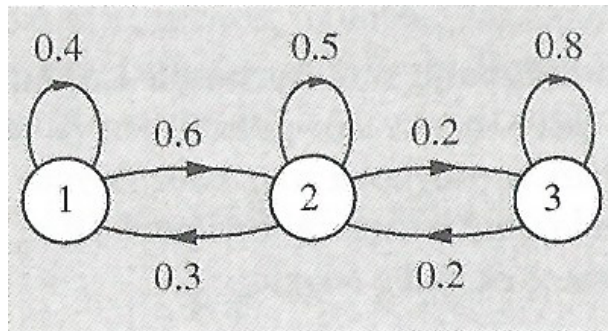
Η ομάδα αποφασίζει να προσλάβει ως προπονητή τον Μπάγιεβιτς, ο οποίος αρνείται να την αφήσει να τα παρατήσει. Τώρα, μετά από μία ήττα, η ομάδα είτε χάνει το επόμενο παιχνίδι με πιθανότητα 0,6, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.4. Όλες οι άλλες πιθανότητες μένουν ίδιες.

γ') Ορίστε τη νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το σύστημα και υπολογίστε τη στατική κατανομή αλυσίδας.

δ') Ποια είναι η συχνότητα με την οποία μία ήττα ακολουθείται από μία ισοπαλία; Ποια η συχνότητα με την οποία μια νίκη ακολουθείται από μια ισοπαλία;

Άσκηση 4.

Θεωρήστε μια αλυσίδα Markov όπως στο Σχήμα 1. Ας αναφερθούμε σε μια μετάβαση η οποία έχει σαν αποτέλεσμα μια κατάσταση με υψηλότερο (αντιστοίχως, χαμηλότερο) δείκτη σαν γέννηση (αντιστοίχως, θάνατο). Υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες, υποθέτοντας ότι όταν αρχίζουμε να παρατηρούμε την αλυσίδα, είναι ήδη σε κατάσταση ισορροπίας.

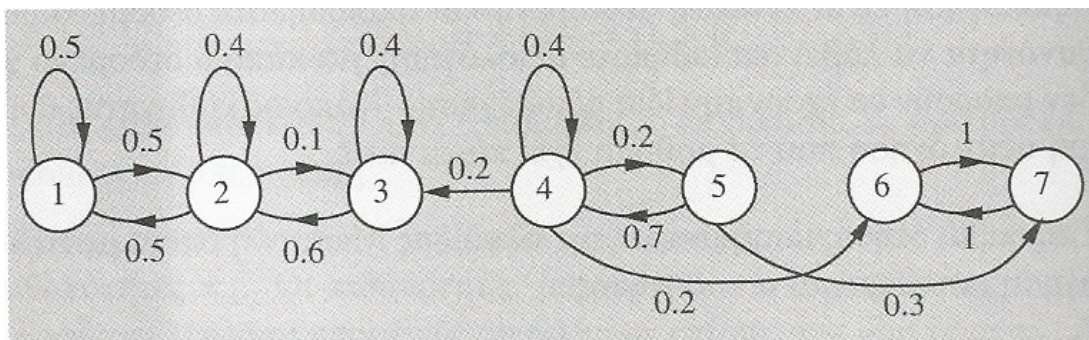


Σχήμα 1: Γράφος πιθανοτήτων μεταβάσεων για την Άσκηση 4.

- α') Για κάθε κατάσταση i , η πιθανότητα ότι η παρούσα κατάσταση είναι i .
- β') Την πιθανότητα ότι η πρώτη μετάβαση που παρατηρούμε είναι μία γέννηση.
- γ') Την πιθανότητα ότι η πρώτη αλλαγή κατάστασης που παρατηρούμε είναι μια γέννηση.
- δ') Τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η διαδικασία ήταν στην κατάσταση 2 πριν από την πρώτη μετάβαση που παρατηρούμε, δεδομένου ότι αυτή η μετάβαση ήταν μια γέννηση.
- ε') Τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η διαδικασία ήταν στην κατάσταση 2 πριν από την πρώτη αλλαγή κατάστασης που παρατηρούμε, δεδομένου ότι η αλλαγή κατάστασης αυτή ήταν μια γέννηση.
- ς') Τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η πρώτη παρατηρούμενη μετάβαση είναι μια γέννηση δεδομένου ότι είχε σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της κατάστασης.
- ζ') Τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η πρώτη παρατηρούμενη μετάβαση οδηγεί στην κατάσταση 2, δεδομένου ότι έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της κατάστασης.

Άσκηση 5.

Θεωρήστε την αλυσίδα Markov που απεικονίζεται στο Σχήμα 2:



Σχήμα 2: Γράφος πιθανοτήτων μεταβάσεων για την Άσκηση 5.

- α')** Αναγνωρίστε τις επαναληπτικές και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις επαναληπτικές κλάσεις και βρείτε ποιες από αυτές είναι περιοδικές.
- β')** Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
- γ')** Υπάρχουν στατικές πιθανότητες, δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 6; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
- δ')** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1, αλλά αρχίζουμε να την παρατηρούμε αφού φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας
 - i)** Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης μετάβασης που παρατηρούμε.
 - ii)** Βρείτε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η διαδικασία ήταν στην κατάσταση 2 όταν αρχίσαμε να την παρατηρούμε, δεδομένου ότι η κατάσταση αυξήθηκε κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης μετάβασης που παρατηρήσαμε.
 - iii)** Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξήθηκε κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης αλλαγής κατάστασης που παρατηρήσαμε.
- ε')** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει από την κατάσταση 4.
 - i)** Για κάθε επαναληπτική κλάση, προσδιορίστε την πιθανότητα ότι κάποτε φτάνουμε στην κλάση αυτή.
 - ii)** Ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι και συμπεριλαμβανομένης της μετάβασης στην οποία φτάσαμε για πρώτη φορά σε μία επαναληπτική κατάσταση;