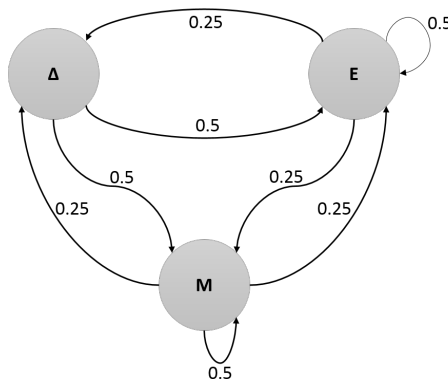


### Άσκηση 1.

Χρησιμοποιούμε μια αλυσίδα Markov με τρεις καταστάσεις,  $E$ ,  $M$  και  $\Delta$ , όπου κάθε κατάσταση αντιπροσωπεύει τη δυσκολία της πιο πρόσφατης εξέτασης (Εύκολη, Μέτρια και Δύσκολη αντίστοιχα). Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 1.

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\begin{bmatrix} r_{\Delta\Delta} & r_{\Delta M} & r_{\Delta E} \\ r_{M\Delta} & r_{MM} & r_{ME} \\ r_{E\Delta} & r_{EM} & r_{EE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα Markov μας έχει μια μοναδική αναδρομική κλάση, η οποία είναι απεριοδική.

Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{4}(\pi_2 + \pi_3) \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3) + \frac{1}{4}\pi_2 \end{aligned}$$

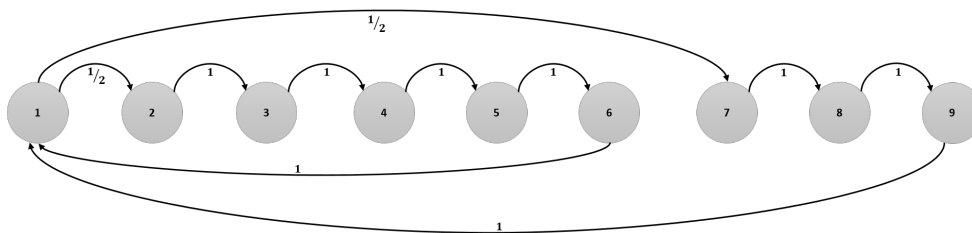
Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την  $\sum_i \pi_i = 1$  έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = \frac{1}{5}, \quad \pi_2 = \pi_3 = \frac{2}{5}.$$

### Άσκηση 2.

Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα 2.

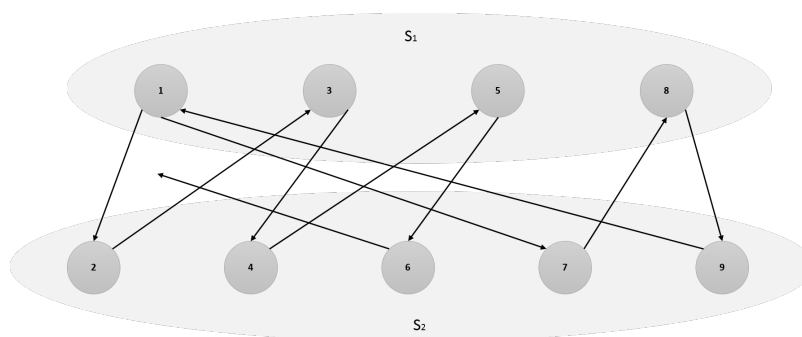
Παρατηρούμε ότι οι 9 καταστάσεις που αποτελούν την αλυσίδα Markov μας αποτελούν μια μοναδική κλάση επικοινωνίας.



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 2.

Σύμφωνα με τη θεωρία γνωρίζουμε ότι μια κλάση ονομάζεται *περιοδική* αν οι καταστάσεις της μπορούν να ομαδοποιηθούν σε  $d > 1$  ξένα μεταξύ τους υποσύνολα  $S_1, \dots, S_d$  έτσι ώστε όλες οι μεταβάσεις από το ένα υποσύνολο οδηγούν στο επόμενο υποσύνολο. Επομένως, σε μία περιοδική επαναληπτική κλάση, μετακινούμαστε διαμέσου μιας διατεταγμένης ακολουθίας υποσυνόλων και μετά από  $d$  βήματα, καταλήγουμε στο αρχικό υποσύνολο.

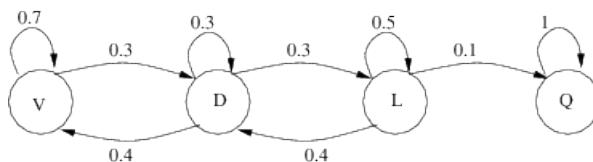
Εδώ παρατηρούμε ότι μπορούμε να χωρίσουμε την κλάση μας στα 2 ξένα μεταξύ τους υποσύνολα  $S_1 = \{1, 3, 5, 8\}$  και  $S_2 = \{2, 4, 6, 7, 9\}$  και μπορούμε από το  $S_1$  να καταλήξουμε διαμέσου του  $S_2$  πίσω στο  $S_1$  με 2 μεταβάσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Επομένως, η κλάση μας είναι περιοδική με περίοδο  $d = 2$ .



Σχήμα 3: Τα υποσύνολα που θεωρούμε για την περιοδικότητα (Άσκηση 3).

### Άσκηση 3.

α') Ορίζουμε τις εξής 4 καταστάσεις:  $\{V : \text{νίκη}, D : \text{ισοπαλία}, L : \text{ήττα}, Q : \text{παραίτηση}\}$ . Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 4. Παρατηρώντας το γράφημα βλέπουμε ότι οι καταστάσεις  $V, D$  και  $L$  είναι όλες μεταβατικές, καθώς από όλες επιτρέπεται η μετάβαση στην  $Q$ , αλλά καμία δεν είναι προσιτή από την  $Q$ , η οποία είναι και έμμονη.



Σχήμα 4: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 3(α).

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο παρακάτω:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**β)** Έστω  $X_n$  η κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας στο τέλος του  $n$ -οστού παιχνιδιού. Με χρήση του διαγράμματος Markov και των δεσμευμένων πιθανοτήτων έχουμε ότι:

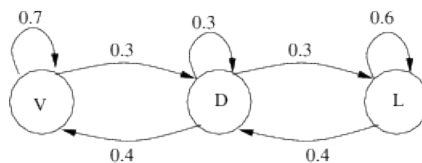
$$\begin{aligned}
 & P(\text{'Η ομάδα τα παρατάει μετά το 3ο παιχνίδι'/'1ο παιχνίδι είναι ισοπαλία'}) \\
 &= P(\text{'3ο παιχνίδι είναι ήττα και η ομάδα τα παρατάει'}/X_1 = D) \\
 &= P(\text{'3ο παιχνίδι είναι ήττα'}/X_1 = D) \cdot P(\text{'"/X}_3 = L) \\
 &= P(X_3 = L/X_1 = D) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L, X_2 = L/X_1 = D) + P(X_3 = L, X_2 = D/X_1 = D) + \\
 &\quad P(X_3 = L, X_2 = V/X_1 = D)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L/X_2 = L) \cdot P(X_2 = L/X_1 = D) + \\
 &\quad P(X_3 = L/X_2 = D) \cdot P(X_2 = D/X_1 = D) + \\
 &\quad P(X_3 = L/X_2 = V) \cdot P(X_2 = V/X_1 = D)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P_{LL} \cdot P_{DL} + P_{DL} \cdot P_{DD} + P_{VL} \cdot P_{DV}) \cdot P_{LQ} \\
 &= (0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4) \cdot 1 = 0.024
 \end{aligned}$$

Ομοίως, εάν το πρώτο παιχνίδι είναι νικηφόρο:

$$\begin{aligned}
 & P(\text{'Η ομάδα τα παρατάει μετά το 3ο παιχνίδι'/'1ο παιχνίδι είναι νικηφόρο'}) \\
 &= P(X_3 = L/X_1 = V) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L, X_2 = L/X_1 = V) + P(X_3 = L, X_2 = D/X_1 = V) + \\
 &\quad P(X_3 = L, X_2 = V/X_1 = V)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P(X_3 = L/X_2 = L) \cdot P(X_2 = L/X_1 = V) + \\
 &\quad P(X_3 = L/X_2 = D) \cdot P(X_2 = D/X_1 = V) + \\
 &\quad P(X_3 = L/X_2 = V) \cdot P(X_2 = V/X_1 = V)) \cdot P_{LQ} \\
 &= (P_{LL} \cdot P_{VL} + P_{DL} \cdot P_{VD} + P_{VL} \cdot P_{VV}) \cdot P_{LQ} \\
 &= (0.5 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.7) \cdot 1 = 0.009
 \end{aligned}$$

δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση η ομάδα τα παρατάει με πιθανότητα μικρότερη κατά  $2/3$  περίπου.

**γ)** Η νέα αλυσίδα φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 3(γ).

Ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Για αυτήν τη Μαρκοβιανή αλυσίδα γεννήσεων-θανάτου, οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας δίνουν:

$$\begin{aligned} \pi_L \cdot P_{LD} &= \pi_D \cdot P_{DL} & \implies & 0.4\pi_L = 0.3\pi_D \\ \pi_V \cdot P_{VD} &= \pi_D \cdot P_{DV} & \implies & 0.3\pi_V = 0.3\pi_D \end{aligned}$$

Μαζί με την  $\pi_V + \pi_D + \pi_L = 1$ , έχουμε ότι:

$$\pi_L = \frac{9}{37}, \pi_D = \frac{12}{37}, \pi_V = \frac{16}{37}$$

δ') Σύμφωνα με την ερμηνεία που δώσαμε στην τάξη:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[\text{πλήθος των ηττών που ακολουθούνται από ισοπαλία σε } n \text{ παιχνίδια}]}{n} &= \pi_L \cdot P_{LD} \\ &= \frac{9}{37} \cdot 0.4 \\ &= \frac{18}{185} = 0.0973 \end{aligned}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[\text{πλήθος των νικών που ακολουθούνται από ισοπαλία σε } n \text{ παιχνίδια}]}{n} &= \pi_V \cdot P_{VD} \\ &= \frac{16}{37} \cdot 0.3 \\ &= \frac{24}{185} = 0.1297 \end{aligned}$$

#### Άσκηση 4.

α') Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$0.6\pi_1 = 0.3\pi_2, \quad 0.2\pi_2 = 0.2\pi_3.$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης, έχουμε ότι:

$$\pi_1 = \frac{1}{5}, \quad \pi_2 = \pi_3 = \frac{2}{5}.$$

β') Η πιθανότητα ότι η πρώτη μετάβαση είναι γέννηση είναι:

$$0.6\pi_1 + 0.2\pi_2 = \frac{0.6}{5} + \frac{0.2 \cdot 2}{5} = \frac{1}{5}.$$

γ') Αν η κατάσταση είναι 1, που συμβαίνει με πιθανότητα  $1/5$ , η πρώτη αλλαγή κατάστασης είναι σίγουρα γέννηση. Αν η κατάσταση είναι 2, που συμβαίνει με πιθανότητα  $2/5$ , η πιθανότητα ότι η πρώτη αλλαγή κατάστασης είναι γέννηση ισούται με  $\frac{0.2}{0.3+0.2} = \frac{2}{5}$ . Τέλος, αν η κατάσταση είναι 3, η πιθανότητα ότι η πρώτη αλλαγή κατάστασης είναι γέννηση ισούται με 0.

Άρα, η συνολική πιθανότητα ότι η πρώτη αλλαγή κατάστασης που παρατηρούμε είναι γέννηση ισούται με:

$$1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{25}.$$

δ') Έχουμε

$$\begin{aligned} P(\text{η κατάσταση ήταν } 2 \mid \text{η πρώτη μετάβαση είναι γέννηση}) &= \\ \frac{P(\text{η κατάσταση ήταν } 2 \cap \text{η πρώτη μετάβαση είναι γέννηση})}{P(\text{η πρώτη μετάβαση είναι γέννηση})} &= \\ \frac{\pi_2 \cdot 0.2}{1/5} &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

ε') Όπως δείξαμε στο ερώτημα (γ'), η πιθανότητα ότι η πρώτη αλλαγή κατάστασης είναι γέννηση είναι  $9/25$ . Επιπλέον, η πιθανότητα ότι η κατάσταση είναι 2 και η πρώτη αλλαγή κατάστασης είναι γέννηση είναι  $\frac{2\pi_2}{5} = \frac{4}{25}$ . Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{4/25}{9/25} = \frac{4}{9}.$$

ς') Σε μια στοχαστική διαδικασία θανάτου-γέννησης, πρέπει να υπάρχουν τόσες γεννήσεις όσοι θάνατοι, συν πλην 1. Συνεπώς, η οριακή πιθανότητα γεννήσεων πρέπει να ισούται με την οριακή πιθανότητα θανάτων. Άρα, σε σταθερή κατάσταση, οι μισές αλλαγές κατάστασης αναμένεται να είναι γεννήσεις. Γι' αυτό, η δεσμευμένη πιθανότητα ότι η πρώτη μετάβαση που παρατηρούμε είναι γέννηση, δεδομένου ότι είχε σαν αποτέλεσμα την αλλαγή κατάστασης, ισούται με  $1/2$ .

Εναλλακτικά, η απάντηση μπορεί να ληφθεί αλγεβρικά:

$$\begin{aligned} P(\text{γέννηση} \mid \text{αλλαγή κατάστασης}) &= \frac{P(\text{γέννηση})}{P(\text{αλλαγή κατάστασης})} \\ &= \frac{1/5}{\frac{1}{5} \cdot 0.6 + \frac{2}{5} \cdot 0.5 + \frac{2}{5} \cdot 0.2} \\ &= \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ζ') Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\text{οδηγεί στην κατάσταση } 2 \mid \text{αλλαγή}) &= \frac{P(\text{αλλαγή που οδηγεί στην κατάσταση } 2)}{P(\text{αλλαγή})} \\ &= \frac{\pi_1 \cdot 0.6 + \pi_3 \cdot 0.2}{2/5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Αυτό είναι διαισθητικό, διότι για κάθε αλλαγή κατάστασης που οδηγεί στην κατάσταση 2, πρέπει να υπάρχει μια μεταγενέστερη αλλαγή κατάστασης που θα οδηγεί μακριά από την κατάσταση 2.

### Άσκηση 5.

α') Οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές και όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι έμμονες. Υπάρχουν δύο επαναλαμβανόμενες κλάσεις. Η κλάση  $\{1, 2, 3\}$  είναι απεριοδική και η κλάση  $\{6, 7\}$  είναι περιοδική.

β') Αν η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση 1, μένει μέσα στην απεριοδική αναδρομική κλάση  $\{1, 2, 3\}$  και οι πιθανότητες  $n$ -οστής μετάβασης συγκλίνουν στις στατικές πιθανότητες  $\pi_i$ . Έχουμε  $\pi_i = 0$  για  $i \notin \{1, 2, 3\}$ .

Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\pi_1 = \pi_2, \quad \pi_2 = 6\pi_3.$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης, έχουμε:

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{6}{13}, \quad \pi_3 = \frac{1}{13}.$$

**γ')** Επειδή η κλάση  $\{6, 7\}$  είναι περιοδική, δεν υπάρχουν στατικές πιθανότητες. Συγκεκριμένα, η ακολουθία  $r_{66}$  εναλλάσσεται μεταξύ 0 και 1 και δε συγκλίνει.

**δ')** **i)** Η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά ένα κατά την πρώτη μετάβαση ισούται με:

$$0.5\pi_1 + 0.1\pi_2 = \frac{18}{65}.$$

**ii)** Η πιθανότητα ότι η διαδικασία βρίσκεται σε κατάσταση 2 και ότι η κατάσταση αυξάνεται είναι:

$$0.1\pi_2 = \frac{0.6}{13}.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα είναι:

$$\frac{0.6/13}{18/65} = \frac{1}{6}.$$

**iii)** Αν η κατάσταση είναι 1 (με πιθανότητα  $6/13$ ), είναι βέβαιο ότι θα αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης. Αν η κατάσταση είναι 2 (με πιθανότητα  $6/13$ ), υπάρχει πιθανότητα  $1/6$  αύξησης κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης. Τέλος, αν η κατάσταση είναι 3, δε μπορεί να αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης.

Συνεπώς, τελικά η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης ισούται με:

$$\frac{6}{13} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{13} = \frac{7}{13}.$$

**ε')** **i)** Έστω  $\alpha_4$  και  $\alpha_5$  οι πιθανότητες απορροφήσεως από την κλάση  $\{1, 2, 3\}$ , ξεκινώντας από την κατάσταση 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= 0.2 + 0.4\alpha_4 + 0.2\alpha_5 \\ \alpha_5 &= 0.7\alpha_4 \end{aligned}$$

που δίδει:

$$\alpha_4 = 0.2 + 0.4\alpha_4 + 0.14\alpha_4$$

και  $\alpha_4 = 10/23$ . Επίσης, η πιθανότητα ότι κάποτε φτάνουμε στην κλάση  $\{6, 7\}$ , ξεκινώντας από την κατάσταση 4 είναι  $1 - (10/23) = 13/23$ .

**ii)** Έστω  $\mu_4$  και  $\mu_5$  οι αναμενόμενοι χρόνοι μέχρι να φτάσουμε σε μια επαναληπτική κατάσταση, ξεκινώντας από την κατάσταση 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= 1 + 0.4\mu_4 + 0.2\mu_5 \\ \mu_5 &= 1 + 0.7\mu_4 \end{aligned}$$

Συμπληρώνοντας τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη και λύνοντας ως προς  $\mu_4$ , παίρνουμε:

$$\mu_4 = \frac{60}{23}.$$