

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 10
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Άσκηση 1.

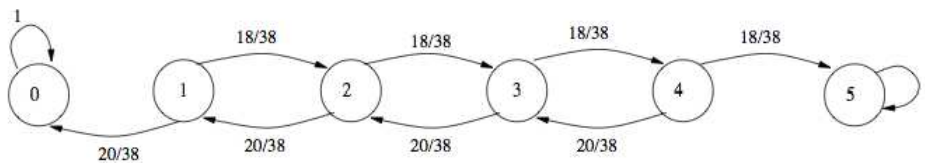
Ο Κώστας πηγαίνει στο Las Vegas. Δε θέλει να χάσει πάρα πολλά λεφτά οπότε αποφασίζει να παίζει μόνο με 3\$ και να σταματήσει να παίζει όταν θα τα έχει κάνει 5\$ ή όταν θα τα έχει χάσει όλα. Πλησιάζει μία ρουλέτα η οποία έχει 18 κόκκινες, 18 μαύρες και 2 πράσινες θέσεις. Αποφασίζει ότι πάντα θα ποντάρει 1\$ στο κόκκινο.

- α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του παιχνιδιού του Κώστα. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;
- β) Με τι πιθανότητα θα φύγει ο Κώστας χαρούμενος από το καζίνο; Με τι πιθανότητα θα φύγει χαμένος; Πώς μεταβάλλονται αυτές οι πιθανότητες αν αρχίζει το παιχνίδι με 2\$;
- γ) Πόσο θα διαρκέσει η διασκέδαση του Κώστα στη ρουλέτα; Με άλλα λόγια, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών μέχρις ότου χάσει τα λεφτά του ή φύγει με 5\$ στην τσέπη;

Λύση.

- α) Ως κατάσταση του συστήματος ορίζουμε τον αριθμό των δολαρίων που ο Κώστας έχει στην τσέπη του $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 1.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο ακόλουθος:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20/38 & 0 & 18/38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20/38 & 0 & 18/38 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20/38 & 0 & 18/38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20/38 & 0 & 18/38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Έμμονες καταστάσεις: 0 και 5.
(Προσβάσιμες από όλες τις καταστάσεις της κλάσης τους, αλλά όχι από επαναληπτικές καταστάσεις άλλων κλάσεων.)
- Μεταβατικές καταστάσεις: 1, 2, 3 και 4.
(Δεν είναι προσβάσιμες από καμία έμμονη κατάσταση.)

β') Ζητούνται ουσιαστικά οι πιθανότητες απορρόφησης του συστήματος από τις καταστάσεις $s = 0$ (φεύγει χαμένος) και $s = 5$ (φεύγει κερδισμένος), όταν αυτό ξεκινά από τις καταστάσεις $i = 3$ ή $i = 2$.

Σχετική θεωρία:

Έστω μία συγκεκριμένη κατάσταση απορρόφησης s . Ορίζουμε ως πιθανότητες απορρόφησης του συστήματος από την s , ξεκινώντας από την i :

$$\alpha_i \triangleq P(X_n \text{ τελικά ισούται με την κατάσταση απορρόφησης } s \mid X_0 = i)$$

Για μια αλυσίδα Markov όπου κάθε κατάσταση είναι είτε μεταβατική, είτε απορροφήσεως, οι πιθανότητες απορρόφησης α_i της αλυσίδας από την κατάσταση s ξεκινώντας από την i είναι οι μοναδικές λύσεις του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} \alpha_s &= 1 \\ \alpha_i &= 0, \quad \text{για κάθε κατάσταση απορροφήσεως } i \neq s \\ \alpha_j &= \sum_{i=1}^m p_{ij} \alpha_i, \quad \text{για κάθε μεταβατική κατάσταση } i \end{aligned}$$

Εδώ, έστω ότι ο Κώστας φεύγει χαμένος, τότε $s = 0$ και οι πιθανότητες απορρόφησης ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_5 &= 0 \\ \alpha_1 &= p_{10} \cdot \alpha_0 + p_{12} \cdot \alpha_2 = \frac{20}{38} \cdot 1 + \frac{18}{38} \cdot \alpha_2 \\ \alpha_2 &= p_{21} \cdot \alpha_1 + p_{23} \cdot \alpha_3 = \frac{20}{38} \cdot \alpha_1 + \frac{18}{38} \cdot \alpha_3 \\ \alpha_3 &= p_{32} \cdot \alpha_2 + p_{34} \cdot \alpha_4 = \frac{20}{38} \cdot \alpha_2 + \frac{18}{38} \cdot \alpha_4 \\ \alpha_4 &= p_{43} \cdot \alpha_3 + p_{45} \cdot \alpha_5 = \frac{20}{38} \cdot \alpha_3 + \frac{18}{38} \cdot 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8398 \\ 0.6618 \\ 0.4640 \\ 0.2442 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η πιθανότητα λοιπόν, να φύγει χαμένος από το καζίνο, ενώ έχει μπει με 3\$ είναι $\alpha_3 = 0.4640$, ενώ η πιθανότητα να φύγει χαμένος αν ξεκινούσε με 2\$ είναι $\alpha_2 = 0.6618$.

Αντίστοιχα, η πιθανότητα ο Κώστας να φύγει χαρούμενος είναι η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την $s = 5$. Θα μπορούσαμε να κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία επίλυσης

γραμμικού συστήματος όπως παραπάνω, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο διότι έχουμε μόνο δύο έμμονες καταστάσεις, άρα οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$$1 - \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1602 \\ 0.3382 \\ 0.5360 \\ 0.7558 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα να φύγει χαρούμενος από το καζίνο ενώ είχε μπει με 3\$ είναι $1 - \alpha_3 = 0.5360$, ενώ αν είχε μπει με 2\$ είναι $1 - \alpha_2 = 0.3382$.

γ') Ζητείται ο μέσος χρόνος απορρόφησης του συστήματος, ξεκινώντας από την κατάσταση $i = 3$.

Σχετική θεωρία:

Μέσος χρόνος απορροφήσεως μ_i , ξεκινώντας από την κατάσταση i είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} \mu_i &= 0, \quad \text{για κάθε έμμονη κατάσταση } i \\ \mu_i &= 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} \mu_j, \quad \text{για κάθε μεταβατική κατάσταση } i \end{aligned}$$

Άρα εδώ:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_5 = 0 \\ \mu_1 &= 1 + p_{10} \cdot \mu_0 + p_{12} \cdot \mu_2 = 1 + \frac{20}{38} \cdot 0 + \frac{18}{38} \cdot \mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + p_{21} \cdot \mu_1 + p_{23} \cdot \mu_3 = 1 + \frac{20}{38} \cdot \mu_1 + \frac{18}{38} \cdot \mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + p_{32} \cdot \mu_2 + p_{34} \cdot \mu_4 = 1 + \frac{20}{38} \cdot \mu_2 + \frac{18}{38} \cdot \mu_4 \\ \mu_4 &= 1 + p_{43} \cdot \mu_3 + p_{45} \cdot \mu_5 = 1 + \frac{20}{38} \cdot \mu_3 + \frac{18}{38} \cdot 0 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε το ζητούμενο μ_3 .

Άσκηση 2.

Ένα πειραματικό ποντίκι είναι φυλακισμένο μέσα σε ένα κλουβί με τρεις πόρτες. Σε κάθε γύρο, το ποντίκι ανοίγει τυχαία μία πόρτα και τρώει ένα κομμάτι τυρί, εάν υπάρχει τέτοιο πίσω από την πόρτα που άνοιξε. Κάθε πόρτα επιλέγεται με ίση πιθανότητα σε κάθε γύρο, ανεξάρτητα από το που το ποντίκι βρήκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Αν δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί σε αυτόν τον γύρο είναι $\frac{3}{4}$. Αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και η ίδια πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 0. Ενώ αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και διαφορετική πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 1.

α') Μας ενδιαφέρει το αν το ποντίκι τρώει το τυρί του σε κάθε γύρο. Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του πειράματος. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

- β')** Αν παρατηρήσετε το ποντίκι για 1000 γύρους, σε ποιο ποσοστό αυτών θα το δείτε να τρώει το τυρί του;
- γ')** Έστω ότι δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει ένα κομμάτι τυρί;
- δ')** Έστω ότι δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει n κομμάτια τυρί;

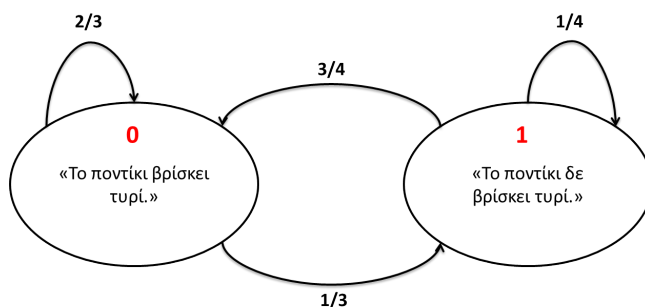
Βοήθεια: Στα ερωτήματα **(γ')** και **(δ')** χρησιμοποιείτε τις γνώσεις σας σχετικά με μέσους χρόνους ως την πρώτη επίσκεψη και μέσο χρόνο επανόδου, αντίστοιχα.

- ε')** Κοιτάτε μέσα στο κλουβί και παρατηρείτε ότι το ποντίκι τρώει ένα κομμάτι τυρί πίσω από την πόρτα 1. Ποια είναι η πιθανότητα ότι 3 γύρους μετά, το ποντίκι θα βρεθεί να τρώει πάλι πίσω από την πόρτα 1;

Βοήθεια: Στο ερώτημα **(ε')**, χρειάζεται να ορίσετε μία νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα που να περιγράφει και τις πόρτες πίσω από τις οποίες το ποντίκι βρίσκει τυρί.

Λύση.

- α')** Εφόσον μας ενδιαφέρει αν το ποντίκι τρώει το τυρί του, ορίζουμε μία αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 2, Ερώτημα α'.

Ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Εξήγηση επιμέρους πιθανοτήτων:

- $P(\Theta \text{ α βρει} \mid \Delta \text{ ε βρήκε πριν}) = \frac{3}{4}$ (δίδεται από την εκφώνηση)
- $P(\Delta \text{ ε θα βρει} \mid \Delta \text{ ε βρήκε πριν}) = 1 - P(\Theta \text{ α βρει} \mid \Delta \text{ ε βρήκε πριν}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
- $P(\Theta \text{ α βρει} \mid \text{Βρήκε πριν}) = P(\text{Να επιλέξει διαφορετική πόρτα από αυτήν του προηγούμενου γύρου}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
- $P(\Delta \text{ ε θα βρει} \mid \text{Βρήκε πριν}) = P(\text{Να επιλέξει την ίδια πόρτα με αυτήν του προηγούμενου γύρου}) = \frac{1}{3}$.

- β')** Για να βρούμε σε πόσους από τους 1000 γύρους το ποντίκι τρώει το τυρί, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.

Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 \\ \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 \\ \Rightarrow \frac{1}{3}\pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_1\end{aligned}$$

που σε συνδυασμό με την $\pi_0 + \pi_1 = 1$ μας δίνει $\pi_0 = \frac{9}{13} = 0.692$ και $\pi_1 = \frac{4}{13}$.

Άρα σε κάποιο συγκεκριμένο γύρο στο μακρινό μέλλον, το ποντίκι θα τρώει τυρί με πιθανότητα 0.692 και αν παρατηρήσουμε το τυρί για 1000 γύρους, θα τρώει το τυρί στους $1000 \times 0.692 = 692$ από αυτούς.

- γ') Μας ζητείται ο μέσος χρόνος ως την πρώτη επίσκεψη της κατάστασης 0, ξεκινώντας από την κατάσταση 1.

Σχετική θεωρία:

Ο μέσος αριθμός των βημάτων ή αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πρώτη διέλευση του συστήματος από μία συγκεκριμένη έμμονη κατάσταση s , ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση i , είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned}t_s &= 0 \\ t_i &= 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij}t_j, \quad \text{για κάθε } i \neq s\end{aligned}$$

Άρα, εδώ:

$$\begin{aligned}t_0 &= 0, s = 0 \quad (\text{η έμμονη κατάσταση για την οποία ψάχνουμε την 1η διέλευση}) \\ t_1 &= 1 + p_{10} \cdot t_0 + p_{11} \cdot t_1 = 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{4}{3} = 1.33\end{aligned}$$

- δ') Εδώ, μας ζητείται ο αναμενόμενος χρόνος T , μέχρι την πρώτη διέλευση του συστήματος από την κατάσταση 0, ακολουθούμενος από $(n-1)$ επανόδους στην κατάσταση 0, ξεκινώντας από τη 0, δηλαδή:

$$T = t_1 + (n-1) \cdot t_0^*$$

Σχετική θεωρία:

Ο μέσος χρόνος επανάληψης της κατάστασης s , ορίζεται ως:

$$t_s^* = E[\text{αριθμός μεταβάσεων μέχρι την πρώτη επιστροφή στην } s, \text{ ξεκινώντας από την } s]$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το t_s^* , αν γνωρίζουμε τους χρόνους της 1ης επίσκεψης t_i , χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$t_s^* = 1 + \sum_{j=1}^m p_{sj}t_j$$

Εδώ, γνωρίζουμε από το ερώτημα (γ') ότι $t_0 = 0$ και $t_1 = \frac{4}{3}$.

Έχουμε λοιπόν:

$$t_0^* = 1 + p_{01} \cdot t_1 + p_{00} \cdot t_0 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{13}{9}.$$

Συνεπώς,

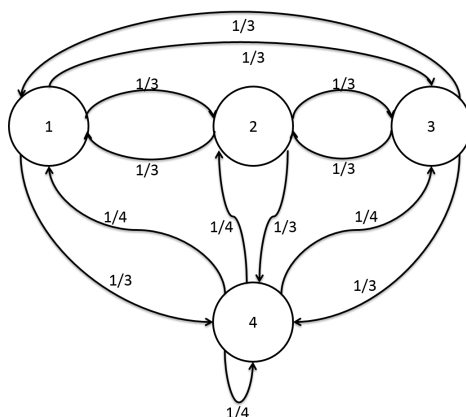
$$T = \frac{4}{3} + (n-1) \cdot \frac{13}{9}$$

ε') Εδώ, μας ενδιαφέρει πίσω από ποια πόρτα βρίσκει το ποντίκι να φάει. Επομένως, ορίζουμε κατάλληλα τις εξής καταστάσεις:

Κατάσταση i : 'Το ποντίκι βρίσκεται τυρί πίσω από την πόρτα $i = 1, 2, 3$ '.

Κατάσταση 4: 'Το ποντίκι δε βρίσκεται τυρί'.

Η αντίστοιχη αλυσίδα Markov φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 2, Ερώτημα ε'.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Εξήγηση μεταβάσεων:

- Από κάθε πόρτα έχει πιθανότητα $1/3$ να επιλέξει την ίδια πόρτα και να μη βρει τυρί. Για κάθε πόρτα διαφορετική της τωρινής, υπάρχει πιθανότητα $1/3$ να επιλεγεί (και σίγουρα πίσω της θα υπάρχει τυρί).
- $P(\text{Δε θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = \frac{1}{4}$ (από την εκφώνηση).
- $P(\text{Θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = 1 - P(\text{Δε θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ($\frac{1}{4}$ για κάθε πόρτα).

Υπάρχουν 7 διαδρομές μήκους 3 που ξεκινούν και καταλήγουν στην κατάσταση 1:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{27}$
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{27}$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{48}$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$2 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{48} = 0.206.$$

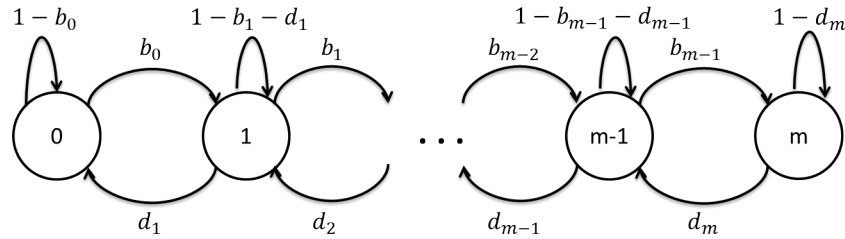
Άσκηση 3. Στο ταμείο της καφετερίας του Πανεπιστημίου εργάζεται μόνο μία υπάλληλος. Λόγω έλλειψης χώρου, επιτρέπει να σχηματίσουν ουρά μπροστά της μόνο M φοιτητές. Αν φτάνοντας στην ουρά κάποιος φοιτητής βρει μπροστά του M συμφοιτητές του (μαζί με αυτόν που εξυπηρετείται εκείνη τη στιγμή), φεύγει αμέσως. Κάθε λεπτό συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα γεγονότα:

- Ένας νέος φοιτητής φτάνει με πιθανότητα p ,
 - ένας φοιτητής φεύγει με πιθανότητα kq , όπου k είναι ο αριθμός των φοιτητών στην καφετέρια,
 - κανένας νέος φοιτητής δεν φτάνει ούτε υπάρχων φεύγει με πιθανότητα $1 - p - kq$ (αν υπάρχει τουλάχιστον ένας φοιτητής στην καφετέρια) ή με πιθανότητα $1 - p$ (αν δεν υπάρχει).
- α') Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας γεννήσεως-θανάτου. Ορίστε τις κατάλληλες καταστάσεις και δώστε το γράφημα της αλυσίδας.
- β') Επισκέπτεστε την καφετέρια αφού αυτή είναι ανοιχτή για αρκετό χρόνο. Πόσους πελάτες περιμένετε να βρείτε στην ουρά;

Λύση.

α') Θεωρία για διαδικασίες Γεννήσεως - Θανάτου:

- Καταστάσεις τοποθετημένες σε σειρά η μία δίπλα στην άλλη.
- Μεταβάσεις μόνο από μία κατάσταση προς τη γειτονική της.
- Η γενική δομή μιας σ.δ. Γεννήσεως - Θανάτου φαίνεται στο Σχήμα 4:

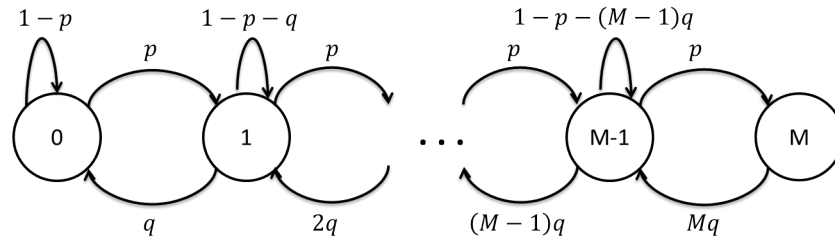


Σχήμα 4: Η γενική δομή μιας σ.δ. Γεννήσεως - Θανάτου.

$b_i = P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) \rightarrow$ πιθανότητα 'γέννησης' στην κατάσταση i .

$d_i = P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) \rightarrow$ πιθανότητα 'θανάτου' στην κατάσταση i .

Εδώ, για να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα, μέσω μιας διαδικασίας Γεννήσεως-Θανάτου, ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με τόσες καταστάσεις, όσοι οι φοιτητές $(0, 1, 2, \dots, M)$ σε απόλυτη αντιστοιχία με τη θεωρία όπως φαίνεται στο Σχήμα 5:



Σχήμα 5: Η σ.δ. Γεννήσεως - Θανάτου φοιτητών στην καφετέρια.

β') Εφόσον η καφετέρια είναι ανοιχτή για αρκετό χρόνο, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για να βρούμε το μέσο αριθμό φοιτητών στην ουρά ο οποίος θα είναι ίσος με

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^M i \pi_i.$$

Γενικά, από τη θεωρία για σ.δ. Γεννήσεως - Θανάτου έχουμε για τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\pi b_i = \pi_{i+1} d_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

Εδώ,

$$\begin{aligned} \pi_i p &= \pi_{i+1} (i+1) q, & i = 0, 1, \dots, M-1 \\ \Rightarrow \pi_{i+1} &= \frac{p}{q(i+1)} \pi_i = \frac{\rho}{i+1} \pi_i, & \text{αν θέσουμε } \rho = \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\rho}{1} \pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{\rho}{2} \pi_1 = \frac{\rho}{2} \frac{\rho}{1} \pi_0 \\ \pi_3 &= \frac{\rho}{3} \pi_2 = \frac{\rho}{3} \frac{\rho}{2} \frac{\rho}{1} \pi_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \pi_i &= \frac{\rho^i}{i!} \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \tag{1}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_M \\ \Rightarrow 1 &= \pi_0 \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^M}{M!} \right) \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^M}{M!}} \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}} \end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας το π_0 στην (1) έχουμε:

$$\pi_i = \frac{\frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}$$

Επομένως, ο μέσος αριθμός των φοιτητών στην ουρά μακροπρόθεσμα θα είναι:

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^M i \pi_i = p \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}$$