

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Άσκηση 1.

Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $var(X) = 4$, $var(Y) = 9$ και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.1$.

α') Αν $Z = 2(X + Y)(X - Y)$, βρείτε την $E[Z]$.

β') Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε τη συνδυασπορά των τ.μ. T και U , $cov(T, U)$.

Λύση.

α') Αφού $Z = 2(X + Y)(X - Y) = 2(X^2 - Y^2)$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[2(X^2 - Y^2)] \\ &= 2(E[X^2] - E[Y^2]) \\ &\stackrel{(1)}{=} 2(var(X) + E^2[X] - (var(Y) + E^2[Y])) \\ &= 2(4 + 1 - 9 - 16) = 2(-20) = -40. \end{aligned}$$

Υπενθύμιση:

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X] \quad (1)$$

β') Για τη συνδυασπορά $cov(T, U)$ θα έχουμε:

1η Λύση:

$$\begin{aligned} cov(T, U) &= cov(2X + Y, 2X - Y) \\ &\stackrel{(2)}{=} cov(2X, 2X) - cov(2X, Y) + cov(Y, 2X) - cov(Y, Y) \\ &\stackrel{(3)}{=} 4cov(X, X) - 2cov(X, Y) + 2cov(Y, X) - cov(Y, Y) \\ &\stackrel{(4),(5)}{=} 4var(X) - var(Y) \\ &= 4 \cdot 4 - 9 = 7. \end{aligned}$$

Υπενθύμιση:

$$cov(X, Y + Z) = cov(X, Y) + cov(X, Z) \quad (2)$$

$$cov(aX, Y) = cov(X, aY) = acov(X, Y) \quad (3)$$

$$cov(X, Y) = cov(Y, X) \quad (4)$$

$$cov(X, X) = var(X) \quad (5)$$

2η Λύση:

$$\begin{aligned} cov(T, U) &= E[TU] - E[T] \cdot E[U] \\ &= E[(2X + Y)(2X - Y)] - E[2X + Y] \cdot E[2X - Y] \\ &= E[4X^2 - 2XY + 2XY - Y^2] - (2E[X] + E[Y]) \cdot (2E[X] - E[Y]) \\ &= 4E[X^2] - E[Y^2] - (2 \cdot 1 + 4) \cdot (2 \cdot 1 - 4) \\ &= 4(var(X) + E^2[X]) - (var(Y) + E^2[Y]) + 12 \\ &= 4(4 + 1) - (9 + 16) - 12 = 20 - 25 - 12 = 7. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέσες τιμές $E[X] = 2, E[Y] = 4$, διασπορές $var(X) = 9, var(Y) = 25$ και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.2$.

Ορίζουμε την τ.μ. $W = X + 2Y + 3$. Υπολογίστε:

α') Τη μέση τιμή και τη διασπορά για την τ.μ. W , $E[W]$ και $var(W)$.

β') Τη συσχέτιση των τ.μ. X και W , $E[XW]$.

Λύση.

α') Για τη μέση τιμή της τ.μ. W έχουμε:

$$E[W] = E[X + 2Y + 3] \stackrel{(6)}{=} E[X] + 2E[Y] + 3 = 2 + 2 \cdot 4 + 3 = 13.$$

Για τη διασπορά:

$$\begin{aligned} var(W) &= var(X + 2Y + 3) \\ &\stackrel{(7)}{=} var(X + 2Y) \\ &\stackrel{(9)}{=} var(X) + var(2Y) + 2 \cdot cov(X, 2Y) \\ &\stackrel{(7)}{=} var(X) + 2^2 \cdot var(Y) + 2 \cdot 2cov(X, Y) \\ &\stackrel{(8)}{=} var(X) + 4 \cdot var(Y) + 4 \cdot \rho_{X,Y} \cdot \sqrt{var(X) \cdot var(Y)} \\ &= 9 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 0.2 \cdot \sqrt{9 \cdot 25} = 121. \end{aligned}$$

Υπενθύμιση:

$$E[aX] = aE[X], \quad E[c] = c \quad (6)$$

$$var(aX) = a^2 var(X), \quad var(c) = 0 \quad (7)$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}} \quad (8)$$

$$var(X, Y) \stackrel{X,Y \text{ συσχέτισμ.}}{=} var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y) \quad (9)$$

$$cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \quad (10)$$

β') Η συσχέτιση των τ.μ. X και W θα είναι:

$$\begin{aligned} E[XW] &= E[X(X + 2Y + 3)] \\ &= E[X^2 + 2XY + 3X] \\ &\stackrel{(6)}{=} E[X^2] + 2 \cdot E[XY] + 3 \cdot E[X] \\ &\stackrel{(10)}{=} var(X) + E^2[X] + 2 \cdot (cov(X, Y) + E[X] \cdot E[Y]) + 3 \cdot E[X] \\ &= 9 + 4 + 2(0.2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4) + 3 \cdot 2 = 41. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Μας δίδεται η διακριτή τ.μ. X για την οποία ισχύει ότι:

$$M_X(s) = a + b \cdot e^{2s} + c \cdot e^{4s}, \quad E[X] = 3, \quad var(X) = 2.$$

Υπολογίστε τις σταθερές a, b, c καθώς και τη σ.π.π. της τ.μ. X .

Λύση.

Για να βρούμε τις σταθερές a, b και c αξιοποιούμε κάθε δεδομένο για να εξάγουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τους τρεις αυτούς αγνώστους, το οποίο και στη συνέχεια λύνουμε για να τους υπολογίσουμε. Συγκεκριμένα:

- Γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτρια για $s = 0$ αθροίζεται στην τιμή 1, άρα:

$$M(0) = M_X(s) \Big|_{s=0} = a + b \cdot e^{2 \cdot 0} + c \cdot e^{4 \cdot 0} = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{a + b + c = 1}$$

- Γνωρίζουμε ότι η $E[X]$ προκύπτει από την παράγωγο της ροπογεννήτριας, άρα:

$$\begin{aligned} E[X] &= 3 \\ \Rightarrow \frac{d}{ds} M_X(s) \Big|_{s=0} &= 3 \\ \Rightarrow \frac{d}{ds} (a + b \cdot e^{2s} + c \cdot e^{4s}) \Big|_{s=0} &= 3 \\ \Rightarrow 2b \cdot e^{2s} + 4c \cdot e^{4s} \Big|_{s=0} &= 3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{2b + 4c = 3}$$

- Γνωρίζουμε ότι η δεύτερη ροπή $E[X^2]$ προκύπτει από τη δεύτερη παράγωγο της ροπογεννήτριας, άρα:

$$\left. \begin{aligned} E[X^2] &= \text{var}(X) + E^2[X] = 2 + 9 = 11 \\ E[X^2] &= \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (2b + 4c) \Big|_{s=0} = 4b + 16c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{4b + 16c = 11}$$

Λύνοντας λοιπόν, το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} 2b + 4c &= 3 \\ a + b + c &= 1 \\ 4b + 16c &= 11 \end{aligned} \right\} \text{έχουμε ότι } a = \frac{1}{8}, b = \frac{2}{8}, c = \frac{5}{8}.$$

Οπότε αντικαθιστώντας στη ροπογεννήτρια συνάρτηση που μας δίδεται έχουμε

$$M_X(s) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot e^{2s} + \frac{5}{8} \cdot e^{4s}$$

Η συνάρτηση πιθανότητας προκύπτει αν συγκρίνουμε την $M_X(s)$ με τη γενική μορφή για ροπογεννήτριες συναρτήσεις διακριτών τυχαίων μεταβλητών: $M_X(s) = \sum_X e^{sx} \cdot p_X(x)$, οπότε θα έχουμε

$$\boxed{p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{2}{8}, & x = 2 \\ \frac{5}{8}, & x = 4 \end{cases}}$$

Άσκηση 4.

Έστω δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές:

- Y κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά 1, $Y \sim N(0, 1)$.
- X ομοιόμορφη στο $[0, 1]$, $X \sim U[0, 1]$.

Ορίζουμε την τ.μ. $Z = X + Y$. Είναι τα παρακάτω σωστά ή λάθος;

α') $var(Z) = 2$.

β') $cov(X, Z) = var(X)$.

Λύση.

α') Ισχύει

$$var(Z) = var(X) + var(Y), \quad \text{εφόσον οι } X \text{ και } Y \text{ είναι ανεξάρτητες.}$$

Προσοχή: Αν δεν ήταν ανεξάρτητες θα είχαμε $var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y)$... Έχουμε

$$var(X) = 1, \quad var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Επομένως,

$$var(Z) = 1 + \frac{1}{12} \neq 2.$$

Άρα ο ισχυρισμός είναι λάθος.

β') Έχουμε

$$cov(X, Z) = E[XZ] - E[X] \cdot E[Z].$$

Αλλά $Z = X + Y$. Τότε

$$\begin{aligned} cov(X, Z) &= E[X(X+Y)] - E[X] \cdot E[X+Y] \\ &= E[X^2 + XY] - E[X] \cdot (E[X] + E[Y]) \\ &= E[X^2] + E[XY] - E^2[X] - E[X] \cdot E[Y] \\ &= E[X^2] - E^2[X] + E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \\ &= var(X) + cov(X, Y). \end{aligned}$$

Όμως, $cov(X, Y) = 0$, αφού οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες. Άρα τελικά, $cov(X, Z) = var(X) \rightarrow$ ο ισχυρισμός είναι σωστός.

Άσκηση 5.

Η τ.μ. Z έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Z(s) = \frac{\alpha - 3s}{s^2 - 6s + 8}$$

α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς α .

β') Βρείτε τη σ.π.π. της τ.μ. Z .

γ') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Z]$.

δ') Υπολογίστε τη διασπορά $var(Z)$.

Λύση.

α') Ο ορισμός της ροπογεννήτριας συνάρτησης είναι

$$M_Z(s) = E[e^{sZ}].$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$M_Z(0) = E[e^{0Z}] = E[1] = 1.$$

Εδώ

$$M_Z(0) = \frac{\alpha - 3 \cdot 0}{0^2 - 6 \cdot 0 + 8} = \frac{\alpha}{8} = 1 \Rightarrow \alpha = 8.$$

β') Για να βρούμε τη ζητούμενη σ.π.π. θα πρέπει να καταλήξουμε σε κάτι της γενικής μορφής για τις ροπογεννήτριες: $M_X(s) = \sum_x e^{sx} \cdot p_X(x)$, είτε σε κάποια ροπογεννήτρια γνωστή κατανομής π.χ. εκθετικής ή Poisson. Αρχικά, χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα σε απλά κλάσματα:

$$M_Z(s) = \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8} = \frac{A}{(s - 4)} + \frac{B}{(s - 2)} \quad (11)$$

Στόχος μας είναι να βρούμε τις δύο σταθερές A, B . Έχουμε

$$A = (s - 4) \cdot M_Z(s) \Big|_{s=4} = (s - 4) \cdot \frac{8 - 3s}{(s - 4)(s - 2)} \Big|_{s=4} = \frac{8 - 12}{2} \Rightarrow A = -2$$

$$B = (s - 2) \cdot M_Z(s) \Big|_{s=2} = (s - 2) \cdot \frac{8 - 3s}{(s - 4)(s - 2)} \Big|_{s=2} = \frac{8 - 6}{-2} \Rightarrow B = -1$$

Άρα

$$(11) \Rightarrow M_Z(s) = \frac{-2}{(s - 4)} + \frac{-1}{(s - 2)}$$

Παρατηρούμε ότι μοιάζει με τη ροπογεννήτρια της εκθετικής τ.μ., όπου ισχύει γενικά ότι $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$. Επιδιώκουμε λοιπόν, να τη φέρουμε σε αυτή τη μορφή

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= \frac{2}{4 - s} + \frac{1}{2 - s} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{4 - s} + \frac{2}{2 - s} \right) \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι η παραπάνω ροπογεννήτρια προέρχεται από εκθετική κατανομή. Γενικά, για μια εκθετική τ.μ. U με παράμετρο λ γνωρίζουμε ότι η σ.π.π. της είναι

$$f_U(u) = \lambda \cdot e^{-\lambda u}, \quad u \geq 0.$$

Άρα, εδώ θα έχουμε:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4 \cdot e^{-4z} + 2 \cdot e^{-2z}), & z \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

γ') • *A τρόπος*

$$E[Z] = \frac{d}{ds} M_Z(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{4 - s} + \frac{1}{2 - s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(4 - s)^2} + \frac{1}{(2 - s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

• *B τρόπος*

$$E[Z] = \int_0^{+\infty} z \cdot f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{1}{2}(4 \cdot e^{-4z} + 2 \cdot e^{-2z}) dz$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} 4z \cdot e^{-4z} dz + \int_0^{+\infty} 2z \cdot e^{-2z} dz \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}.$$

δ) • Α τρόπος

$$E[Z^2] = \frac{d^2}{ds^2} M_Z(s) \Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^3} + \frac{1}{(2-s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{5}{16}.$$

Άρα

$$\text{var}(Z) = E[Z^2] - E^2[Z] = \frac{5}{16} - \left(\frac{3}{8} \right)^2 = \frac{11}{64}.$$

• Β τρόπος

Γνωρίζουμε ότι $\text{var}(Z) = E[Z^2] - E^2[Z]$.

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \int_0^{+\infty} z^2 \cdot f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{2} (4 \cdot e^{-4z} + 2 \cdot e^{-2z}) dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} 4z^2 \cdot e^{-4z} dz + \int_0^{+\infty} 2z^2 \cdot e^{-2z} dz \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{4^2} + \frac{2}{2^2} \right) = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Άρα, $\text{var}(Z) = \frac{11}{64}$.

Άσκηση 6.

Δίδονται οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y με σ.π.π.:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν η συσχέτιση των τ.μ. X και Y , $E[XY]$, και η συνδυασπορά τους, $\text{cov}(X, Y)$.

Λύση.

Αφού οι X και Y είναι ανεξάρτητες, θα ισχύει για τη συσχέτισή τους ότι

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y].$$

Γενικά, γνωρίζουμε ότι αν μια τ.μ. U ακολουθεί εκθετική κατανομή θα έχει σ.π.π.

$$f_U(u) = \lambda \cdot e^{-\lambda u}, \quad u \geq 0.$$

Έχουμε λοιπόν εδώ:

$$\text{Η τ.μ. } X \text{ ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο } \lambda_X = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Η τ.μ. } Y \text{ ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο } \lambda_Y = \frac{1}{2}.$$

Από θεωρία:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda_X} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda_Y} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Άρα τελικά:

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] = 3 \cdot 2 = 6.$$

Η συνδυασπορά τους θα είναι $\text{cov}(X, Y) = 0$, διότι είναι ανεξάρτητες ή αλλιώς

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 6 - 6 = 0.$$

Άσκηση 7.

Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. Y και Z . Η τ.μ. Y είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda = 2$. Η τ.μ. Z είναι Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$.

α') Υπολογίστε την ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $2Z + 3$.

β') Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Y + Z$.

Λύση.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= E[e^{sX}] = \sum_x e^{sx} \cdot p_X(x) \rightarrow \text{Διακριτές τ.μ.} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} \cdot f_X(x) \rightarrow \text{Συνεχείς τ.μ.} \end{aligned}$$

- Εκθετική τ.μ., με $\lambda = 2$.

Για εκθετικές τ.μ. γνωρίζουμε ότι: $M_Y(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s} = \frac{2}{2 - s}$.

- Poisson τ.μ., με $\lambda = 3$.

Για Poisson τ.μ. γνωρίζουμε ότι: $M_Z(s) = e^{\lambda(e^s - 1)} = e^{3(e^s - 1)}$.

α') Για να υπολογίσουμε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. $2Z + 3$, εφαρμόζουμε άμεση αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} M_{2Z+3}(s) &= E[e^{s(2Z+3)}] = E[e^{2zs+3s}] \\ &= E[e^{2zs} \cdot e^{3s}] = e^{3s} \cdot E[e^{2zs}] \\ &= e^{3s} \cdot M_Z(2s) = e^{3s} \cdot e^{3(e^{2s} - 1)} \end{aligned}$$

β') Αφού οι τ.μ. Y και Z είναι ανεξάρτητες:

$$M_{Y+Z} = M_Y(s) \cdot M_Z(s) = \frac{2}{2 - s} \cdot e^{3(e^s - 1)}.$$

Άσκηση 8.

Οι τ.μ. X_1 και X_2 μοντελοποιούν τις παρατηρήσεις ενός σήματος υπό την παρουσία θορύβου, όπως μετρούνται από δύο αισθητήρες ενός ασύρματου δικτύου αισθητήρων. Οι X_1 και X_2 έχουν την ίδια μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Η σηματοθορυβική σχέση (SNR) κάθε παρατήρησης (της X_1 ή της X_2) ορίζεται ως ο λόγος $SNR_X = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$. Ένας μηχανικός συστημάτων επιλέγει να βελτιώσει την ποιότητα των δεδομένων παίρνοντας το μέσο όρο των δύο μετρήσεων: $S = \frac{X_1 + X_2}{2}$.

α') Εκφράστε το $SNR_S = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2}$ της τ.μ. S ως συνάρτηση του SNR_X και του συντελεστή συσχέτισης ρ_{X_1, X_2} μεταξύ των τ.μ. X_1 και X_2 . Δείξτε ότι το SNR_S είναι διπλάσιο από αυτό των παρατηρήσεων, όταν οι X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

β') Ο μηχανικός παρατηρεί ότι $SNR_S = 1.5 SNR_X$. Συνεπώς, συμπεραίνει ότι οι παρατηρήσεις X_1, X_2 είναι συσχετισμένες. Υπολογίστε την τιμή του συντελεστή συσχέτισης ρ_{X_1, X_2} .

γ') Για ποια τιμή του ρ_{X_1, X_2} μπορεί η διαδικασία του μέσου όρου να κάνει το SNR_S αυθαίρετα υψηλό (να το απειρίσει);

Λύση.

α') Έχουμε

$$SNR_S = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2} \quad (1)$$

Ισχύει

$$\mu_S^2 = E[S] = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = E\left[\frac{X_1}{2}\right] + E\left[\frac{X_2}{2}\right] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \frac{1}{2}(E[\mu] + E[\mu]) = \mu.$$

και

$$\begin{aligned}\sigma_S^2 = \text{var}(S) &= \text{var}\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right) \\ &= \text{var}\left(\frac{X_1}{2}\right) + \text{var}\left(\frac{X_2}{2}\right) + 2\text{cov}\left(\frac{X_1}{2}, \frac{X_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\text{var}(X_1) + \frac{1}{4}\text{var}(X_2) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_{X_1, X_2} \sqrt{\text{var}(X_1) \cdot \text{var}(X_2)} \\ &= \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{2}\rho_{X_1, X_2} \sqrt{\sigma^2 \cdot \sigma^2} \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\rho_{X_1, X_2}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2(1 + \rho_{X_1, X_2}).\end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$(1) \Rightarrow \frac{\mu^2}{\frac{1}{2}\sigma^2(1 + \rho_{X_1, X_2})} = \frac{2\mu^2}{\sigma^2(1 + \rho_{X_1, X_2})} = \frac{2}{(1 + \rho_{X_1, X_2})} SNR_X.$$

Όταν οι X_1, X_2 είναι ασυσχέτιστες $\rho_{X_1, X_2} = 0 \Rightarrow SNR_S = 2SNR_X$.

β) Έχουμε

$$\begin{aligned}SNR_S = 1.5SNR_X &\Rightarrow \frac{2}{(1 + \rho_{X_1, X_2})} SNR_X = 1.5SNR_X \\ &\Rightarrow 1.5 + 1.5\rho_{X_1, X_2} = 2 \\ &\Rightarrow \rho_{X_1, X_2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

γ) Έχουμε

$$SNR_S = \frac{2}{(1 + \rho_{X_1, X_2})} SNR_X.$$

Όταν $\rho_{X_1, X_2} \rightarrow 1$, τότε ο παρονομαστής πλησιάζει το 0 και το SNR_S απειρίζεται. Δηλαδή, αν οι δύο μετρήσεις είναι ισχυρά αρνητικά συσχετισμένες, ο μέσος όρος τους έχει άπειρο SNR.

Άσκηση 9.

Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α') Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .

β') Να εξετάσετε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

γ') Να βρεθούν:

i) Η μέση τιμή των τ.μ. X και Y , $E[X]$ και $E[Y]$ αντίστοιχα.

ii) Η διασπορά των τ.μ. X και Y , $\text{var}(X)$ και $\text{var}(Y)$ αντίστοιχα.

δ') Ποια η συνδυασπορά των τ.μ. X και Y , $\text{cov}(X, Y)$;

Λύση.

α') Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}(x,y)$ για την τ.μ. X :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 12xy(1-x) dy = 12x(1-x) \int_0^1 y dy \\ &= 12x(1-x) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{12x(1-x)}{2} \\ \Rightarrow f_X(x) &= 6x(1-x). \end{aligned}$$

Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}(x,y)$ για την τ.μ. Y :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^1 12xy(1-x) dx = 12y \int_0^1 x(1-x) dx \\ &= 12y \int_0^1 x - x^2 dx = 12y \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 12y \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 12y \frac{1}{6} \\ \Rightarrow f_Y(y) &= 2y. \end{aligned}$$

β') Για να είναι οι τ.μ. X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύει:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall x, y \in (0,1).$$

Έχουμε ότι

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 6x(1-x) \cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}(x,y) \quad \forall x, y \in (0,1).$$

Επομένως, οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

γ') i) Η μέση τιμή της τ.μ. X :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^2(1-x) dx \\ &= 6 \int_0^1 x^2 - x^3 dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ \Rightarrow E[X] &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Για τη μέση τιμή της τ.μ. Y έχουμε

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3} [y^3]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

ii) Η διασπορά της τ.μ. Y δίδεται ως

$$\text{var}(Y) = E[X^2] - E^2[X].$$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E[X^2]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^3(1-x) dx \\ &= 6 \int_0^1 x^3 - x^4 dx = 6 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\ \Rightarrow E[X^2] &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}.$$

Αντίστοιχα, για τη διασπορά της τ.μ. Y έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= E[Y^2] - E^2[Y] = \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y) dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy - \frac{4}{9} = \int_0^1 2y^3 dy - \frac{4}{9} \\ &= 2\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} \\ \Rightarrow \text{var}(Y) &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

δ') Στο ερώτημα **(β)** δείξαμε ότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες. Επομένως, η συνδυασπορά τους θα είναι ίση με 0, $\text{cov}(X, Y) = 0$. (Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε είναι και ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Η στατιστική ανεξαρτησία είναι πιο ισχυρή συνθήκη από τη στατιστική συσχέτιση.)