

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Άσκηση 1.

Βρίσκεστε για εξερεύνηση στο τροπικό δάσος της Νότιας Αμερικής αλλά ξεχάσατε το εντομοαπωθητικό σας! Ως αποτέλεσμα, κάθε δευτερόλεπτο σας τσιμπάει ένα κουνούπι με πιθανότητα $p = 0.2$.

- α') Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- β') Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- γ') Τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα δε σας έχει τσιμπήσει κανένα κουνούπι. Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά (μετρώντας από $t = 10$).

Λύση.

- α') Το σενάριο όπου κουνούπια ανεξάρτητα προσγειώνονται πάνω σας, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια στοχαστική διαδικασία $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με κάθε δοκιμή X_i να αποτελεί το γεγονός όπου ένα κουνούπι προσγειώνεται πάνω σας με πιθανότητα p :

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 1 \\ 0.8, & x = 0 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο χρόνος T μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μια στοχαστική διαδικασία Bernoulli μοντελοποιείται ως μια Γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο p , άρα η ζητούμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το χρόνο μέχρι να προσγειωθεί πάνω σας το πρώτο κουνούπι θα είναι Γεωμετρική με $p = 0.2$:

$$p_T(t) = \begin{cases} (1-p)^{t-1} \cdot p = (1-0.2)^{t-1} \cdot 0.2 = (0.8)^{t-1} \cdot 0.2, & t \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- β') Η μέση τιμή της Γεωμετρικής με παράμετρο p είναι $\frac{1}{p}$, επομένως ο μέσος χρόνος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι πρώτη φορά θα είναι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.
- γ') Επειδή η διαδικασία Bernoulli δεν έχει μνήμη, δεν έχει σημασία πότε σας τσίμπησε πρώτη φορά ένα κουνούπι και αν αυτό έγινε το 1ο δευτερόλεπτο, το 2ο, το 20ο ή το 200ο. Επομένως, η μέση τιμή του χρόνου μετρώντας από τη στιγμή $t = 10$ θα είναι και πάλι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

Άσκηση 2.

Η εφαρμογή μίας βάσης δεδομένων σε ένα υπολογιστικό νέφος προσπελαύνεται κατά μέσο όρο από 15 πελάτες ανά λεπτό. Μοντελοποιούμε τις προσβάσεις σύμφωνα με μία Poisson στοχαστική διαδικασία. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι κατά τη διάρκεια ενός λεπτού, 3 πελάτες προσπελαύνουν την εφαρμογή τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα και 2 πελάτες προσπελαύνουν την εφαρμογή τα τελευταία 15 δευτερόλεπτα.

Λύση.

Εδώ ψάχνουμε το πλήθος των πελατών $N(t_1, t_2)$ που προσπελαύνουν την εφαρμογή στη διάρκεια $t_2 - t_1$ δευτερολέπτων. Ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda\tau = \frac{15}{60}(t_2 - t_1) = \frac{(t_2 - t_1)}{4}$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(N[0, 10] = 3, N[45, 60] = 2) &= P(N[0, 10] = 3) \cdot P(N[45, 60] = 2) \quad (\text{ανεξάρτητα γεγονότα}) \\ &= \frac{(\lambda\tau_1)^{k_1} \cdot e^{-\lambda\tau_1}}{k_1!} \cdot \frac{(\lambda\tau_2)^{k_2} \cdot e^{-\lambda\tau_2}}{k_2!} \\ &= \frac{(\frac{10}{4})^3 \cdot e^{(-\frac{10}{4})}}{3!} \cdot \frac{(\frac{15}{4})^2 \cdot e^{(-\frac{15}{4})}}{2!} \\ &= 0.0353 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Κάνετε ένα ταξίδι σαφάρι στην Αφρική. Ένα από τα αξιοθέατα του ταξιδιού είναι η παρακολούθηση λιονταριών και ελεφάντων που έρχονται να πιουν νερό από τον ποταμό Νίγηρα. Τα λιοντάρια φτάνουν στο ποτάμι σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda_l = 8$ την ώρα, ενώ οι ελέφαντες καταφθάνουν σύμφωνα με μία ανεξάρτητη διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda_e = 2$ την ώρα. Την πρώτη μέρα του ταξιδιού σας, φτάνετε στο ποτάμι ελπίζοντας να δείτε πολλά ζώα. Υποθέστε ότι λιοντάρια και ελέφαντες είναι τα μόνα διψασμένα ζώα που επισκέπτονται το ποτάμι.

- α')** Έστω N ο αριθμός των ζώων που βλέπετε τις 3 πρώτες ώρες. Βρείτε τα μεγέθη $E[N]$ και $var(N)$.
- β')** Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε τον 3ο ελέφαντα πριν το 9ο λιοντάρι;
- γ')** Μετά από 3 ώρες έχετε δει 24 λιοντάρια αλλά κανέναν ελέφαντα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε έναν ελέφαντα μέσα στην επόμενη ώρα;
- δ')** Ο φίλος σας έχει φτάσει στο ποτάμι με την ψηφιακή του κάμερα, γεμάτος χαρά ότι θα βγάλει πολλές ωραίες φωτογραφίες. Δυστυχώς η κάμερά του έπεσε και δεν λειτουργεί σωστά: κάθε φορά που πατάει το κουμπί, η κάμερα δε λειτουργεί με πιθανότητα $p = 0.1$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Ο φίλος σας επιχειρεί να φωτογραφίσει κάθε φορά που ένα ζώο (λιοντάρι ή ελέφαντας) φτάνει στο ποτάμι. Έστω X ο χρόνος (σε ώρες) έως ότου πάρει την τρίτη επιτυχή φωτογραφία ενός ελέφαντα. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ;

Λύση.

- α')** Εφόσον οι διαδικασίες με τις οποίες καταφτάνουν τα λιοντάρια και οι ελέφαντες είναι ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson με παραμέτρους $\lambda_l = 8$ και $\lambda_e = 2$, τότε γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η συνολική διαδικασία με την οποία καταφτάνουν τα ζώα θα είναι επίσης Poisson με παράμετρο $\lambda = \lambda_l + \lambda_e = 8 + 2 = 10$. Ο συνολικός αριθμός των ζώων που φτάνουν κατά τις $\tau = 3$ πρώτες ώρες στο ποτάμι, σε αυτή τη συγχωνευμένη στοχαστική διαδικασία Poisson θα έχει παράμετρο $\lambda \cdot \tau = 10 \cdot 3 = 30$. Οπότε η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής N που ορίζει τον αριθμό των ζώων για τις 3 πρώτες ώρες είναι (κατά τα γνωστά για τις τυχαίες μεταβλητές Poisson):

$$E[N] = \lambda \cdot \tau = 30$$

$$var(N) = \lambda \cdot \tau = 30$$

- β')** Κάθε άφιξη ζώου μπορεί να είναι είτε άφιξη ενός ελέφαντα, είτε ενός λιονταριού. Ας υποθέσουμε το γεγονός E_k που δηλώνει ότι το k -οστό ζώο που φτάνει στο ποτάμι είναι ελέφαντας.

Γνωρίζουμε ότι

$$P(E_k) = \frac{\text{ρυθμός με τον οποίο έρχονται ελέφαντες}}{\text{ρυθμός με τον οποίο έρχονται ζώα}} = \frac{\lambda_e}{\lambda_l + \lambda_e} = \frac{2}{8+2} = \frac{1}{5}$$

Θεωρώντας την άφιξη του ελέφαντα ως επιτυχία, σχηματίζεται μια διαδικασία Bernoulli με παράμετρο $p = \frac{1}{5}$. (Αντίστοιχα, ως αποτυχία θεωρείται μια άφιξη λιονταριού με $1 - p = \frac{4}{5}$.) Προσοχή: Η στοχαστική αυτή διαδικασία είναι με τέτοιο τρόπο ορισμένη ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να θεωρούμε ότι έχουμε άφιξη κάποιου ζώου.

Μας ζητείται η πιθανότητα άφιξης του 3ου ελέφαντα πριν το 9ο λιοντάρι. Προφανώς αν αρχίσουμε να μετράμε από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και εφόσον σε κάθε χρονική στιγμή θα έχουμε άφιξη κάποιου ζώου, το γεγονός ισοδυναμεί με το ζητούμενο γεγονός να παρατηρήσουμε τον 3ο ελέφαντα πριν από την $t = 12$ η ώρα στη διαδικασία Bernoulli που περιγράψαμε. Για να ικανοποιείται το γεγονός που μας ζητείται θα πρέπει στη θέση $t = 12$ να υπάρχει σίγουρα το 9ο λιοντάρι, ενώ ο 3ος ελέφαντας μπορεί να βρίσκεται στις θέσεις $t = 3$ ως $t = 11$.

Έστω, λοιπόν, T_3 η χρονική στιγμή της άφιξης του 3ου ελέφαντα στο ποτάμι. Τότε, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(T_3 < 12) &= \sum_{t=3}^{11} P(T_3 = t) \\ &= \sum_{t=3}^{11} \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k} \quad (\text{Pascal τάξης } k) \\ &= \sum_{t=3}^{11} \binom{t-1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{t-3} \end{aligned}$$

Υ) Επειδή η διαδικασία Poisson άφιξης ενός λιονταριού είναι ανεξάρτητη από τη διαδικασία άφιξης ενός ελέφαντα, τα γεγονότα '24 λιοντάρια φτάνουν μέσα σε 3 ώρες' και 'κανένας ελέφαντας δεν εμφανίζεται μέσα σε 3 ώρες' είναι επίσης ανεξάρτητα. Έστω λοιπόν, T_1 η χρονική στιγμή της πρώτης άφιξης ενός ελέφαντα.

Έστω το γεγονός

$A = \{\text{Ένας ελέφαντας φτάνει την 4η ώρα} \mid \text{κανένας ελέφαντας δεν εμφανίζεται μέσα σε 3 ώρες}\}.$

Τότε η επιθυμητή πιθανότητα ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{ελέφαντας φτάνει την 4η ώρα} \mid \text{κανένας ελέφαντας δεν εμφανίζεται μέσα σε 3 ώρες}) \\ &= P(T_1 \leq 4 \mid T_1 > 3), \quad (\text{Άφιξη ελέφαντα ανάμεσα στην 3η και 4η ώρα}) \\ &= P(T_1 < 1), \quad (\text{Έλλειψη μνήμης σ.δ. Poisson, μπορούμε να ξεκινήσουμε να μετράμε από το 0 και να θεωρήσουμε ότι ο ελέφαντας έρχεται μέσα στην 1η ώρα}) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad (\text{Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της εκθετικής τ.μ. } T_1) \\ &= 1 - e^{-2 \cdot 1} \end{aligned}$$

Εναλλακτική λύση:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{ελέφαντας φτάνει την 4η ώρα} \mid \text{κανένας ελέφαντας δεν εμφανίζεται μέσα σε 3 ώρες}) \\ &= P(T_1 \leq 4 \mid T_1 > 3), \quad (\text{Άφιξη ελέφαντα ανάμεσα στην 3η και 4η ώρα}) \\ &= 1 - P(T_1 > 4 \mid T_1 > 3) \\ &= 1 - P(T_1 > 0) \quad (\text{Άφιξη ελέφαντα μετά τη χρονική στιγμή 0 από την οποία αρχίζουμε να μετράμε λόγω έλλειψης μνήμης της σ.δ Poisson, } T_1 \sim \exp(\lambda)) \\ &= 1 - \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda \tau} \\ &= 1 - e^{-\lambda \tau} \\ &= 1 - e^{-2 \cdot 1} \end{aligned}$$

δ') Η τ.μ. X εκφράζει το χρόνο (σε ώρες) έως ότου ο φίλος μας πάρει την τρίτη επιτυχή φωτογραφία ενός ελέφαντα. Εφόσον η διαδικασία άφιξης των λιονταριών είναι ανεξάρτητη από την διαδικασία άφιξης των ελεφάντων, μπορούμε να επικεντρωθούμε στη διαδικασία άφιξης των ελεφάντων. Οπότε χωρίζουμε τη διαδικασία άφιξης των ελεφάντων σε δύο διαδικασίες, η μία αποτελείται από τις επιτυχημένες φωτογραφίες των ελεφάντων (την οποία θα αποκαλούμε διαδικασία άφιξης επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες) και την άλλη η οποία αποτελείται από τις μη επιτυχημένες φωτογραφίες ελεφάντων (την οποία θα αποκαλούμε διαδικασία άφιξης μη επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες). Εφόσον η ποιότητα κάθε φωτογραφίας είναι ανεξάρτητη από κάθε άλλη, η διαδικασία άφιξης επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda_{se} = 0.9\lambda_e = 0.9 \cdot 2 = 1.8$. Επομένως, η X είναι η τρίτη χρονική άφιξη επιτυχημένης φωτογραφίας με ελέφαντα. Άρα η X είναι τυχαία μεταβλητή Erlang $k = 3$ ης τάξης με $\sigma.π.π.$:

$$f_{X_k}(x) = \frac{\lambda^k \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(k-1)!} = \frac{1.8^3 \cdot x^2 \cdot e^{-1.8x}}{2!}, \quad x > 0$$

Άσκηση 4.

Θεωρήστε μία Poisson στοχαστική διαδικασία με ρυθμό $\lambda > 0$.

- α') Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε ακριβώς μία άφιξη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$ και $(2, 3]$.
- β') Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(0, 2]$ και 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 3]$.
- γ') Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 2]$ δεδομένου ότι έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(0, 2]$ και 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 3]$.

Λύση.

- α') Τα χρονικά διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$ είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν την ίδια διάρκεια ίση με $\tau = 1$ μονάδα χρόνου. Κάθε διάστημα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda\tau$, άρα η πιθανότητα να έχουμε ακριβώς $k = 1$ άφιξη είναι:

$$\begin{aligned} p(k, \tau) \cdot p(k, \tau) \cdot p(k, \tau) &= \left(\frac{(\lambda\tau)^k \cdot e^{-\lambda\tau}}{k!} \right)^3 \\ &= (\lambda \cdot e^{-\lambda})^3 \\ &= \lambda^3 \cdot e^{-3\lambda} \end{aligned}$$

- β') Έστω $N(t_1, t_2]$ το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $(t_1, t_2]$. Τότε, όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία η μεταβλητή $N(t_1, t_2]$ ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο $\lambda(t_2 - t_1)$. Μας ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος $A = \{N(0, 2] = 2, N(1, 3] = 2\}$. Επειδή τα χρονικά διαστήματα $(0, 2]$ και $(1, 3]$ επικαλύπτονται, τα γεγονότα $N(0, 2] = 2$ και $N(1, 3] = 2$ δεν είναι ξένα. Μπορούμε όμως να 'σπάσουμε' το γεγονός A σε ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα εξετάζοντας αντ' αυτού τις αφίξεις στα μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$. Για να ισχύει λοιπόν το A πρέπει:

- Είτε $\{N(0, 1] = 0, \quad N(1, 2] = 2, \quad N(2, 3] = 0\}$
- Είτε $\{N(0, 1] = 2, \quad N(1, 2] = 0, \quad N(2, 3] = 2\}$
- Είτε $\{N(0, 1] = 1, \quad N(1, 2] = 1, \quad N(2, 3] = 1\}$

Τότε το A αποτελεί ένωση ξένων μεταξύ τους γεγονότων $B_{i,j,k}$ όπου

$$B_{i,j,k} = \{N(0, 1] = i, \quad N(1, 2] = j, \quad N(2, 3] = k\}$$

Άρα

$$P(A) = P(B_{020} \cup B_{111} \cup B_{202}) = P(B_{020} + B_{111} + B_{202}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P(B_{020}) &= P(N(0, 1] = 0) \cdot P(N(1, 2] = 2) \cdot P(N(2, 3] = 0) \\ &= \frac{(\lambda 1)^0 \cdot e^{-\lambda 1}}{0!} \cdot \frac{(\lambda 1)^2 \cdot e^{-\lambda 1}}{2!} \cdot \frac{(\lambda 1)^0 \cdot e^{-\lambda 1}}{0!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_{111}) &= P(N(0, 1] = 1) \cdot P(N(1, 2] = 1) \cdot P(N(2, 3] = 1) \\ &= (\lambda \cdot e^{-\lambda}) \cdot (\lambda \cdot e^{-\lambda}) \cdot (\lambda \cdot e^{-\lambda}) \\ &= (\lambda \cdot e^{-\lambda})^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_{202}) &= P(N(0, 1] = 2) \cdot P(N(1, 2] = 0) \cdot P(N(2, 3] = 2) \\ &= \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \end{aligned}$$

Και τελικά

$$\begin{aligned} (1) &= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot e^{-\lambda} + (\lambda \cdot e^{-\lambda})^3 + \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \\ &= \left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^3 + \frac{\lambda^4}{4} \right) \cdot e^{-3\lambda} \end{aligned}$$

γ) Ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα

$$P(\{N(1, 2] = 2\} | A) = \frac{P(\{N(1, 2] = 2\} \cap A)}{P(A)} \quad (2)$$

Για να ισχύουν ταυτόχρονα τα A και $\{N(1, 2] = 2\}$ πρέπει και οι 2 αφίξεις να γίνουν στο διάστημα $(1, 2]$ και καμία στα $(0, 1]$ και $(2, 3]$. Άρα $P(\{N(1, 2] = 2\} \cap A) = P(B_{020})$ και

$$(2) = \frac{P(B_{020})}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot e^{-\lambda}}{\left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^3 + \frac{\lambda^4}{4} \right) \cdot e^{-3\lambda}}$$

Άσκηση 5.

Τα χρονικά διαστήματα (μετρημένα σε λεπτά της ώρας) μεταξύ των αφίξεων αυτοκινήτων σε ένα σταθμό ελέγχου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικές τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 2$. Οι χρόνοι των διαδοχικών αφίξεων καταχωρούνται σε μικρές κάρτες, όπου κάθε κάρτα έχει χώρο για 3 καταχωρήσεις. Όταν γεμίζει μια κάρτα αντικαθίσταται από άλλη.

- α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων;
- β) Δεδομένου ότι κανένα αυτοκίνητο δεν έφτασε τα τελευταία 4 λεπτά, ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού k των αυτοκινήτων που θα φτάσουν τα επόμενα 6 λεπτά;
- γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού χρόνου που απαιτείται για να γεμίσουν οι πρώτες 12 κάρτες καταχώρησης.
- δ) Θεωρήστε το ακόλουθο πείραμα: Διαλέγετε τυχαία μία κάρτα από μία στοίβα από συμπληρωμένες κάρτες και σημειώνετε το συνολικό χρόνο, Y , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[Y]$ και $var(Y)$.

Λύση.

- α') Το χρονικό διάστημα T μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς,

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ λεπτά.}$$

- β') Μας ζητείται η σ.π.π. k εκθετικών διαδοχικών αφίξεων σε διάστημα μήκους 6 λεπτών με ρυθμό $\lambda = 2$. Μοντελοποιούνται με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda\tau$, όπου $\tau = 6$ λεπτά και $\lambda = 2$. Άρα:

$$\begin{aligned} p_K(k) &= \frac{(\lambda\tau)^k \cdot e^{-\lambda\tau}}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ &= \frac{(2 \cdot 6)^k \cdot e^{-2 \cdot 6}}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ &= \frac{12^k \cdot e^{-12}}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- γ') Κάθε κάρτα αναχώρησης έχει χώρο για 3 καταχωρήσεις. Άρα, οι πρώτες 12 κάρτες γεμίζουν με την $12 \cdot 3 = 36$ η άφιξη αυτοκινήτου. Μας ζητείται λοιπόν, η σ.π.π. του χρόνου της 36ης άφιξης.

Χρόνος k -στης άφιξης: Έστω $Y = T_1 + T_2 + \dots + T_{36}$ όπου T_k είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τ.μ. με $\lambda = 2$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η Y ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 36:

$$\begin{aligned} f_{Y_k}(y) &= \frac{\lambda^k \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda y}}{(k-1)!}, & t \geq 0 & \quad (\text{Erlang τάξης } k) \\ \Rightarrow f_{Y_{36}}(y) &= \frac{2^{36} \cdot y^{35} \cdot e^{-2y}}{35!}, & t \geq 0 & \quad (k = 36, \lambda = 2) \end{aligned}$$

είναι η ζητούμενη σ.π.π.

Για τη μέση τιμή έχουμε:

$$E[Y_k] = E[T_1] + E[T_2] + \dots + E[T_k] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda} = \frac{36}{2} = 18.$$

Για τη ροπογεννήτρια έχουμε:

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= M_{T_1}(s) \cdot M_{T_2}(s) \cdots M_{T_k}(s), & (\text{Ανεξάρτητες και εκθετικά κατανομημένες τ.μ με } \lambda = 2) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right)^k, & s < \lambda & \quad (\text{Από θεωρία } M(s) \text{ εκθετικής: } \frac{\lambda}{\lambda - s}, \quad s < \lambda) \\ &= \left(\frac{2}{2 - s} \right)^{36}, & s < 2 & \end{aligned}$$

- δ') Εφόσον κάθε κάρτα έχει χώρο για 3 καταχωρήσεις/χρόνους αφίξεων έχουμε:

$$Y = T_1 + T_2 + T_3.$$

Ουσιαστικά λοιπόν, μας ζητείται ο χρόνος μέχρι την 3η άφιξη. Δε μας ενδιαφέρει ποιες συνεχόμενες 3 αφίξεις μελετάμε, καθώς όλες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δε μας ενδιαφέρει το πότε αρχίζουμε αν μελετάμε, αφού η διαδικασία δεν έχει μνήμη.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο χρόνος μέχρι την k -οστή άφιξη ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης k . Άρα για τη μέση τιμή και τη διασπορά θα έχουμε:

$$E[Y] = E[T_1] + E[T_2] + E[T_3] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda} = \frac{3}{2} = 1.5.$$

$$var(Y) = var(T_1) + var(T_2) + var(T_3) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2} = \frac{3}{4}.$$

Διαδικασία Bernoulli: Οι αφίξεις συμβαίνουν σε διακριτό χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν γεωμετρική κατανομή

Αριθμός αφίξεων σε κάποιο προκαθορισμένο χρονικό διάστημα:

• Διωνυμική με παράμετρο p , n : Ευφράζει το συνολικό αριθμό των επιτυχιών k σε n ανεξάρτητες δοκιμές:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$

$$E[S] = n \cdot p, \quad \text{var}(S) = n \cdot p(1-p)$$

Χρόνος μέχρι την πρώτη αφίξη:

• Γεωμετρική με παράμετρο p : Ευφράζει τον αριθμό των δοκιμών T ως και την πρώτη επιτυχία.

$$P_T(t) = (1-p)^{t-1} \cdot p, \quad t=1,2,\dots$$

$$E[T] = 1/p, \quad \text{var}(T) = \frac{1-p}{p^2}$$

Χρόνος μεταξύ των αφίξεων - Χρόνος k -ετής αφίξης

ε.κ. Y_k : ο χρόνος της k -ετής επιτυχίας

ε.κ. T_k : ο k -ετος χρόνος μεταξύ των αφίξεων - αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δοκιμών μετά την $(k-1)$ -στη επιτυχία ως την επόμενη επιτυχία. Έτσι: $T_1 = Y_1$, $T_k = Y_k - Y_{k-1}$, $k=2,3,\dots$

$$Y_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k: \text{αριθμός δοκιμών ως την } k\text{-στη επιτυχία}$$

Οι T_k είναι ανεξάρτητες, γεωμετρικά κατανοημένες ε.κ. με την ίδια παράμετρο p . Άρα για την $Y_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ έχουμε:

$$\bullet E[Y_k] = E[T_1] + E[T_2] + \dots + E[T_k] = \frac{k}{p}$$

$$\bullet \text{var}(Y_k) = \text{var}(T_1) + \text{var}(T_2) + \dots + \text{var}(T_k) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

$$\bullet P_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}, \quad t=k, k+1, \dots \sim \text{Pascal τάξης } k$$

Διαδικασία Poisson: Οι αφίξεις συμβαίνουν σε συνεχή χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Αριθμός αφίξεων σε χρονικό διάστημα μήκους τ

• Poisson με παράμετρο $\lambda \tau$: Ευφράζει το συνολικό αριθμό των αφίξεων σε διάστημα μήκους τ .

$$P_{N_\tau}(k) = P(k, \tau) = \frac{(\lambda \tau)^k e^{-\lambda \tau}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$E[N_\tau] = \lambda \tau, \quad \text{var}(N_\tau) = \lambda \tau$$

Χρόνος μέχρι την 1η αφίξη

• Εκθετική με παράμετρο λ

$$P_T(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$E[T] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Χρόνος k -ετής αφίξης

Η ε.κ. $Y_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ ευφράζεται ως το άθροισμα k ανεξάρτητων εκθετικά κατανοημένων ε.κ.

$$\bullet E[Y_k] = E[T_1] + E[T_2] + \dots + E[T_k] = \frac{k}{\lambda}$$

$$\bullet \text{var}(Y_k) = \text{var}(T_1) + \text{var}(T_2) + \dots + \text{var}(T_k) = \frac{k}{\lambda^2}$$

$$\bullet f_{Y_k}(y) = \frac{\lambda^k \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda y}}{(k-1)!} \sim \text{Glang τάξης } k$$

Άθροισμα ανεξάρτητων Poisson ε.κ.

$$M \sim \text{Poisson}(\mu)$$

$$N \sim \text{Poisson}(\nu)$$

$$(M+N) \sim \text{Poisson}(\mu+\nu)$$

①

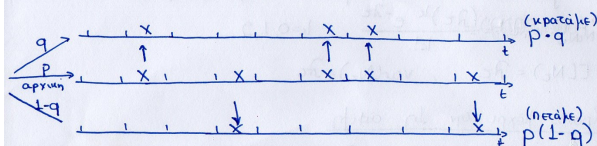
Διαδικασία Bernoulli (συνέχεια)

Η κατανομή Pascal οφείλεται σε ερωτήματα του τύπου $P(k\text{-ετής επιτυχίας στη δοκιμή } t)$

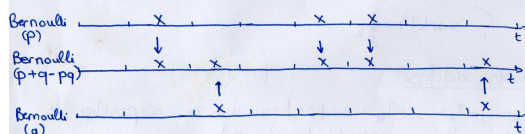
$$P_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$$

$$P\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Διάρθρωση ε.δ. Bernoulli:



Συμπέρασμα ε.δ. Bernoulli:



Poisson προσέγγιση διωνυμικής:

Η Poisson ε.κ. με παράμετρο λ παίρνει τη αρνητικές ανεξάρτητες τιμές με πιθανότητα:

$$P_\lambda(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$E[Z] = \lambda, \quad \text{var}(Z) = \lambda$$

Για να δει τη αρνητική ανεξάρτητη k , η διωνυμική πιθανότητα

$$P_{k,n}(k) = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k (1-p)^{n-k} \text{ συγκλίνει στο } p_\lambda(k), \text{ για } n \rightarrow \infty$$

με $p = \frac{\lambda}{n}$ κρατώντας το λ σταθερό.

Γενικά η προσέγγιση είναι καλή όταν $\lambda = n \cdot p$ με n πολύ μεγάλο και p πολύ μικρό.

Διαδικασία Poisson (συνέχεια)

Διάρθρωση ε.δ. Poisson: Όποτε υπάρχει αφίξη την κρατάμε με πιθανότητα p και την πετάμε με πιθανότητα $(1-p)$. Έτσι τελικά έχουμε δύο ε.δ. Poisson με παράμετρους $\lambda_1 p$ και $\lambda_1 (1-p)$.

Συγχώνευση ε.δ. Poisson: Αρχίσαμε με δύο ανεξάρτητες ε.δ.

Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 και τις συγχωνεύουμε κατά γραφόμενα μια αφίξη τότε έχουμε αφίξη σε μία από τις 2 ε.δ. Η ε.δ. που προκύπτει είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1 + \lambda_2$.

Είλη:

$$P(\text{αφίξη από } \lambda_1 \mid 1 \text{ αφίξη}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$P(\text{αφίξη από } \lambda_2 \mid 1 \text{ αφίξη}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Γενίκευση: Η συνολική ε.δ. αφίξεων που προκύπτει από τη συγχώνευση των αφίξεων " n " ανεξάρτητων ε.δ. Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Τυχαιοί εμφανισμοί σε μια ε.δ. Poisson: Αν και τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων έχουν μέση διάρκεια $\frac{1}{\lambda}$ μονάδες χρόνου, ένας παρατηρητής που φανεί σε μια αυθαίρετη χρονική στιγμή είναι πιο πιθανό να βρεθεί σε ένα μεγάλο τμήμα διαστήματος παρά σε ένα μικρό. Σε απεικόνιση, μέση διάρκεια του διαστήματος που βρεθεί ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη, δηλαδή $\frac{2}{\lambda}$.

②