

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2016

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

5ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.

Δύο πομποί, ο Α και ο Β, στέλνουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, μηνύματα στον ίδιο δέκτη σύμφωνα με στοχαστικές διαδικασίες *Poisson*, με ρυθμούς $\lambda_A = 0.2$ μηνύματα ανά δευτερόλεπτο και $\lambda_B = 0.6$ μηνύματα ανά δευτερόλεπτο, αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι όλα τα μηνύματα είναι τόσο σύντομα που καταλαμβάνουν ένα σημείο στον άξονα του χρόνου.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μεταξύ των αφίξεων του τρίτου και τέταρτου μηνύματος στο δέκτη;

(β) Ποιο είναι το μέσο πλήθος των μηνυμάτων τύπου Α που φτάνουν στο δέκτη στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μήκους 12 δευτερολέπτων;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο δέκτης θα λάβει ακριβώς 9 μηνύματα στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μήκους 10 δευτερολέπτων;

(δ) Υποθέτουμε ότι το πλήθος των *bits* σε κάθε μήνυμα, ανεξαρτήτως πηγής, είναι μια τυχαία μεταβλητή W , η οποία παίρνει τιμές 1 και 2 με την ίδια πιθανότητα $1/2$. Έστω N το συνολικό πλήθος των *bits* που λαμβάνει ο δέκτης στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μήκους t δευτερολέπτων. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ N .

Λύση

(α) Η στοχαστική διαδικασία αφίξεων στο δέκτη είναι *Poisson*, με ρυθμό: $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0.2 + 0.6 = 0.8$ μηνύματα / δευτερόλεπτο. Συνεπώς, το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (άρα και μεταξύ της τρίτης και τέταρτης αφίξης) ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.8$. Επομένως, έχει μέση τιμή $\frac{1}{\lambda} = 1.25 \text{ sec}$.

(β) Το πλήθος των μηνυμάτων τύπου Α σε διάστημα t ακολουθεί *Poisson* κατανομή με παράμετρο $\lambda_A \cdot t = 0.2 \times 12 = 2.4$. Συνεπώς, η μέση τιμή του είναι 2.4 μηνύματα.

(γ) Έστω ότι το πλήθος των μηνυμάτων M , που φτάνουν στο δέκτη σε διάστημα t , ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B) \cdot t = (0.2 + 0.6) \times 10 = 8$. Συνεπώς,

$$P(M = 9) = e^{-8} \frac{8^9}{9!} = 0.1241$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$p_W(w) = \begin{cases} 1/2, & w = 1, 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το μέσο πλήθος *bits* σε ένα μήνυμα είναι: $E[W] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1.5$. Ισχύει ότι $N = W_1 + W_2 + \dots + W_M$, όπου W_i είναι το πλήθος των *bits* στο i -οστό μήνυμα και M είναι το πλήθος των μηνυμάτων που φτάνουν στο δέκτη σε $t \text{ sec}$. Από το (γ) ερώτημα έχουμε ότι η τ.μ M ακολουθεί την κατανομή Ποισσον με παράμετρο $0.8 \cdot t$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Μέσης τιμής (ΘΟΜΤ) έχουμε:

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(M=m) \cdot E[N/M=m] = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(M=m) \cdot E[W_1 + \dots + W_m] = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(M=m) \cdot m \cdot E[W] = \\ &= E[M] \cdot E[W] = 0.8t \times 1.5 = 1.2t \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Το σώμα των ψηφοφόρων σ'ένα χωριό της Κρήτης αποτελείται από 300 άντρες και 196 γυναίκες. Κάθε άντρας (αντίστοιχα, κάθε γυναίκα) θα πάει να ψηφίσει με πιθανότητα 0.4 (αντίστοιχα, 0.5) στις επόμενες εκλογές, ανεξάρτητα από κάθε άλλο. Χρησιμοποιήστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για να υπολογίσετε την πιθανότητα του γεγονότος ότι θα ψηφίσουν περισσότεροι άντρες από γυναίκες.

Λύση

Έστω $M(N)$ το πλήθος των αντρών (γυναικών) που θα ψηφίσουν. Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $M \sim \Delta(n=300, p=0.4)$ και $N \sim \Delta(n=196, p=0.5)$. Ζητούμε την πιθανότητα $P(M > N) = P(M - N > 0)$.

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δε μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα στη διαφορά $M - N$, αλλά ξεχωριστά στη M και στη N , καθώς αυτές είναι το άθροισμα $n = 300$ και $n = 196$ ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών, αντίστοιχα.

Επομένως, η M μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά Γκαουσιανή τ.μ με $E[M] = np = 300 \times 0.4 = 120$ και διασπορά $var(M) = np(1-p) = 300 \times 0.4 \times 0.6 = 72$

Ομοίως, η N μπορεί να θεωρηθεί Γκαουσιανή με $E[N] = np = 196 \times 0.5 = 98$ και $var(N) = np(1-p) = 196 \times (0.5)^2 = 49$.

Επομένως, η $M - N$ είναι προσεγγιστικά Γκαουσιανή, ως διαφορά δύο Γκαουσιανών τ.μ και έχει:

$$\begin{aligned} E[M - N] &= E[M] - E[N] = 120 - 98 = 22 \\ var(M - N) &= var(M) + var(N) = 72 + 49 = 121 \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$P(M - N > 0) = P\left(\frac{M - N - 22}{11} > \frac{-22}{11}\right) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.974$$

Άσκηση 3.

Κάθε μέρα του χρόνου βρέχει με πιθανότητα 0.1 ανεξάρτητα από μέρα σε μέρα. Χρησιμοποιήστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για να υπολογίσετε την πιθανότητα να βρέξει τουλάχιστον 100 από τις 365 ημέρες του χρόνου.

Λύση

Ορίζουμε τη δεικτρια τ.μ X_i , $i = 1, 2, \dots, 365$ ως εξής:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{όταν βρέχει την } i - \text{οστή μέρα} \\ 0, & \text{όταν δεν βρέχει την } i - \text{οστή μέρα} \end{cases}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι τ.μ X_i είναι *Bernoulli* ανεξάρτητες τ.μ με παράμετρο $p = 0.1$. Επομένως:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= p = 0.1 \\ \text{var}(X_i) &= p(1 - p) = 0.1 \times 0.9 = 0.09 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το πλήθος των βροχερών ημερών κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι:

$$S_{365} = X_1 + \dots + X_{365}$$

Η τ.μ S_{365} ακολουθεί διωνυμική κατανομή: $S_{365} \sim \Delta(n = 365, p = 0.1)$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$P(S_{365} \geq 100) = \sum_{k=100}^{365} \binom{365}{k} \cdot 0.1^k \cdot 0.9^{365-k}$$

Κάνοντας χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 100) &= P\left(\frac{S_{365} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{100 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ &= P\left(\frac{S_{365} - 365 \cdot 0.1}{\sqrt{365 \cdot 0.1 \cdot 0.9}} \geq \frac{100 - 365 \cdot 0.1}{\sqrt{365 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{63.5}{0.3 \cdot \sqrt{365}}\right) = \\ &= 1 - \Phi(11.08) \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

Τα χρονικά διαστήματα (μετρημένα σε λεπτά της ώρας) μεταξύ των αφίξεων αυτοκινήτων σε ένα σταθμό ελέγχου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικές τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 2$. Οι χρόνοι των διαδοχικών αφίξεων καταχωρούνται σε μικρές κάρτες, όπου κάθε κάρτα έχει χώρο για 3 καταχωρήσεις. Όταν γεμίζει μια κάρτα αντικαθίσταται από άλλη.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων;

(β) Δεδομένου ότι κανένα αυτοκίνητο δεν έφτασε τα τελευταία 4 λεπτά, ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού k των αυτοκινήτων που θα φτάσουν τα επόμενα 6 λεπτά;

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού χρόνου που απαιτείται για να γεμίσουν οι πρώτες 12 κάρτες καταχώρησης.

(δ) Θεωρήστε το ακόλουθα πείραμα:

1. Διαλέγετε τυχαία μία κάρτα από μία στοίβα από συμπληρωμένες κάρτες και σημειώνετε το συνολικό χρόνο, Y , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[Y]$ και $var(Y)$.
2. Φτάνετε στο σταθμό ελέγχου μια τυχαία χρονική στιγμή. Όταν η κάρτα που χρησιμοποιείτε τη στιγμή της άφιξής σας γεμίσει, σημειώνετε το συνολικό χρόνο, W που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[W]$ και $var(W)$.

Λύση.

(α) Το χρονικό διάστημα T μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς,

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ λεπτά.}$$

(β) Μας ζητείται η σ.π.π. k εκθετικών διαδοχικών αφίξεων σε διάστημα μήκους 6 λεπτών με ρυθμό $\lambda = 2$. Μοντελοποιούνται με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda\tau$, όπου $\tau = 6$ λεπτά και $\lambda = 2$. Άρα:

$$\begin{aligned} p_K(k) &= \frac{(\lambda\tau)^k \cdot e^{-\lambda\tau}}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ &= \frac{(2 \cdot 6)^k \cdot e^{-2 \cdot 6}}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ &= \frac{12^k \cdot e^{-12}}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(γ) Κάθε κάρτα αναχώρησης έχει χώρο για 3 καταχωρήσεις. Άρα, οι πρώτες 12 κάρτες γεμίζουν με την $12 \cdot 3 = 36$ άφιξη αυτοκινήτου. Μας ζητείται λοιπόν, η σ.π.π. του χρόνου της 36ης άφιξης.

Χρόνος k -στης άφιξης: Έστω $Y = T_1 + T_2 + \dots + T_{36}$ όπου T_k είναι ανεξάρτητες εκθετικά καταμεμημένες τ.μ. με $\lambda = 2$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η Y ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 36:

$$\begin{aligned} f_{Y_k}(y) &= \frac{\lambda^k \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda y}}{(k-1)!}, & t \geq 0 & \quad (\text{Erlang τάξης } k) \\ \Rightarrow f_{Y_{36}}(y) &= \frac{2^{36} \cdot y^{35} \cdot e^{-2y}}{35!}, & t \geq 0 & \quad (k = 36, \lambda = 2) \end{aligned}$$

είναι η ζητούμενη σ.π.π.

Για τη μέση τιμή έχουμε:

$$E[Y_k] = E[T_1] + E[T_2] + \dots + E[T_k] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda} = \frac{36}{2} = 18.$$

Για τη ροπογεννήτρια έχουμε:

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= M_{T_1}(s) \cdot M_{T_2}(s) \cdots M_{T_k}(s), \quad (\text{Ανεξάρτητες και εκθετικά κατανομημένες τ.μ με } \lambda = 2) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right)^k, \quad s < \lambda \quad (\text{Από θεωρία } M(s) \text{ εκθετικής: } \frac{\lambda}{\lambda - s}, \quad s < \lambda) \\ &= \left(\frac{2}{2 - s} \right)^{36}, \quad s < 2 \end{aligned}$$

(6)

1. Εφόσον κάθε κάρτα έχει χώρο για 3 καταχωρήσεις/χρόνους αφίξεων έχουμε:

$$Y = T_1 + T_2 + T_3.$$

Ουσιαστικά λοιπόν, μας ζητείται ο χρόνος μέχρι την 3η άφιξη. Δε μας ενδιαφέρει ποιες συνεχόμενες 3 αφίξεις μελετάμε, καθώς όλες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δε μας ενδιαφέρει το πότε αρχίζουμε αν μελετάμε, αφού η διαδικασία δεν έχει μνήμη.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο χρόνος μέχρι την k -οστή άφιξη ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης k . Άρα για τη μέση τιμή και τη διασπορά θα έχουμε:

$$E[Y] = E[T_1] + E[T_2] + E[T_3] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda} = \frac{3}{2} = 1.5.$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(T_1) + \text{var}(T_2) + \text{var}(T_3) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2} = \frac{3}{4}.$$

2. Στην περίπτωση αυτή έχουμε: $W = T_1 + T_2 + L$, όπου ορίζουμε ως L το χρονικό διάστημα μεταξύ των αφίξεων που περιέχουμε την χρονική στιγμή που φτάσαμε στο σταθμό ελέγχου. Σύμφωνα με το παράδοξο της τυχαίας άφιξης, η τ.μ L θα ακολουθεί την κατανομή Erlang 2ης τάξης, με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς, η W είναι Erlang 4ης τάξης.

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{4}{\lambda} = 2 \\ \text{var}(W) &= \frac{4}{\lambda^2} = 1 \end{aligned}$$