

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Μεθοδολογία κανονικής προσέγγισης βασισμένης στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

Έστω

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

όπου X_i ανεξάρτητες όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 .
Αν το πλήθος n είναι μεγάλο, η πιθανότητα $P(S_n \leq c)$ μπορεί να προσεγγιστεί θεωρώντας την τ.μ. S_n κανονική σύμφωνα με την ακόλουθη διαδικασία:

1. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή $n\mu$ και τη διασπορά $n\sigma^2$ της S_n .
2. Υπολογίζουμε την ανιγμένη τιμή $z = \frac{c - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.
3. Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση $P(S_n \leq c) \approx \Phi(z)$, όπου $\Phi(z)$ είναι διαθέσιμη σε πίνακες.

Άσκηση 1.

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_{16}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Ορίζουμε:

$$W = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_{16}) - (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{16})}{16}$$

Υπολογίστε την πιθανότητα:

$$P(|W - E[W]| < 0.001)$$

Λύση.

Η τ.μ. W μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$W = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (X_i - Y_i) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} Z_i, \quad \text{όπου } Z_i = X_i - Y_i.$$

Έχουμε ότι

$$E[Z_i] = E[X_i - Y_i] = E[X_i] - E[Y_i] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Η μέση τιμή της τ.μ. W είναι

$$E[W] = E\left[\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} Z_i\right] = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} E[Z_i] = 0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$P(|W - E[W]| < 0.001) = P(|W| < 0.001) = P(-0.001 < W < 0.001)$$

Μπορούμε να κάνουμε χρήση του Κ.Ο.Θ. καθώς η τ.μ. W εκφράζεται ως το άθροισμα 16 ανεξάρτητων και όμοια κατανομημένων τ.μ. Z_i .

Υπενθύμιση:

Για ομοιόμορφες τ.μ. στο διάστημα $[a, b]$ ισχύει
 $\mu = \frac{a+b}{2}, \quad var = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Υπολογίζουμε τώρα και τη διασπορά :

$$\begin{aligned} \text{var}(Z_i) &= \text{var}(X_i - Y_i) = \text{var}(X_i) + \text{var}(-Y_i) = \text{var}(X_i) + \text{var}(Y_i) \\ &= \frac{(1-0)^2}{12} + \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

και

$$\text{var}(W) = \text{var}\left(\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} Z_i\right) = \frac{1}{16^2} \sum_{i=1}^{16} \text{var}(Z_i) = \frac{1}{16^2} \cdot 16 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6}.$$

Άρα τελικά :

$$\begin{aligned} P(-0.001 < W < 0.001) &= P\left(\frac{-0.001 - 0}{\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6}}} < \frac{W - 0}{\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6}}} < \frac{0.001 - 0}{\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6}}}\right) \\ &= P\left(\frac{-0.001}{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{4}} < \frac{W}{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{4}} < \frac{0.001}{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{4}}\right) \\ &= P(-0.004\sqrt{6} < \frac{W}{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{4}} < 0.004\sqrt{6}) \\ &= \Phi(0.004\sqrt{6}) - \Phi(-0.004\sqrt{6}) \\ &= \Phi(0.004\sqrt{6}) - (1 - \Phi(0.004\sqrt{6})) \\ &= 2\Phi(0.004\sqrt{6}) - 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Σε μία παραλλαγή του παιχνιδιού blackjack που προσφέρεται από ένα καζίνο, για κάθε ευρώ που ποντάρει ένας παίκτης σε μία παρτίδα, το μέσο κέρδος είναι -0.0029€ και η τυπική απόκλιση είναι 1.1418€ . Έστω ότι ο παίκτης ποντάρει 100€ σε κάθε παρτίδα, ανεξάρτητα από παρτίδα σε παρτίδα.

α') Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παίκτη μετά από 1000 παρτίδες;

Το μέσο 'κέρδος' του παίκτη μετά από 1000 παρτίδες είναι

$$1000 \times 100 \times (-0.0029)\text{€} = -290\text{€}.$$

β') Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα, υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο παίκτης κερδίζει μετά από 1000 παρτίδες. Χρησιμοποιήστε ότι $\Phi(0.0803) = 0.5321$.

Το κέρδος του παίκτη μετά από 1000 παρτίδες μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$$

όπου X_i είναι το κέρδος στην i -οστή παρτίδα. Από την εκφώνηση έχουμε ότι :

$$E[X_i] = 100 \times (-0.0029) = -0.29$$

$$\text{var}(X_i) = 100^2 \times 1.1418^2$$

Συνεπώς,

$$E[S] = 1000 \times E[X_i] = -290$$

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \text{var}(S) = 1000 \times \text{var}(X_i) = 1000 \times 100^2 \times 1.1418^2 \\ \Rightarrow \sigma_s &= \sqrt{1000} \times 114.18 = 3610. \end{aligned}$$

Και τελικά,

$$\begin{aligned}
 P(S > 0) &= 1 - P(S \leq 0) \\
 &= 1 - P\left(\frac{S + 290}{3610} \leq \frac{290}{3610}\right) \\
 &= 1 - \Phi(0.0803) \\
 &= 1 - 0.5321 = 0.4679.
 \end{aligned}$$

γ) Υπολογίστε την πιθανότητα ο παίκτης να κερδίζει περισσότερα από 1000 ευρώ μετά από 1000 παρτίδες. Χρησιμοποιήστε ότι $\Phi(0.3573) = 0.6398$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 P(S > 1000) &= 1 - P(S \leq 1000) \\
 &= 1 - P\left(\frac{S + 290}{3610} \leq \frac{1000 + 290}{3610}\right) \\
 &= 1 - \Phi(0.3573) \\
 &= 1 - 0.6398 \\
 &= 0.3602.
 \end{aligned}$$

δ) Πόσες παρτίδες n πρέπει να παίξει ένας παίκτης, ώστε η πιθανότητα να κερδίζει μετά από n παρτίδες να είναι 0.4; Χρησιμοποιήστε ότι $\Phi(0.253) = 0.6$.

Τώρα, το κέρδος του παίχτη μετά από n παρτίδες εκφράζεται ως το άθροισμα

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

και ζητάμε να ισχύει

$$P(S_n > 0) = 0.4.$$

Έχουμε για τη μέση τιμή και τη διασπορά:

$$E[S_n] = E[X_i] \times n = -0.29 \times n, \quad \text{var}(S_n) = \text{var}(X_i) \times n = 100^2 \times 1.1418^2 \times n$$

Και τελικά:

$$\begin{aligned}
 P(S_n > 0) &= 1 - P(S_n \leq 0) \\
 &= 1 - P\left(\frac{S_n + 0.29n}{114.18\sqrt{n}} \leq \frac{0.29n}{114.18\sqrt{n}}\right) = 0.4 \\
 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{0.29n}{114.18\sqrt{n}}\right) &= 0.4 \\
 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.29n}{114.18\sqrt{n}}\right) &= 0.6 = \Phi(0.253) \\
 \Rightarrow \frac{0.29n}{114.18\sqrt{n}} &= 0.253 \\
 \Rightarrow n &= 9923 \text{ παρτίδες.}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Δύο τύποι μεταφορικών μέσων πηγαίνουν από την πλατεία Ελευθερίας στις Βούτες: ταξί και λεωφορεία. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων των ταξί στην πλατεία (σε λεπτά της ώρας) είναι ανεξάρτητες τ.μ. εκθετικά κατανομημένες με παράμετρο λ_1 , ενώ οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων των λεωφορείων είναι ανεξάρτητες τ.μ. εκθετικά κατανομημένες με παράμετρο λ_2 . Υποθέτουμε ότι δύο συμφοιτητές, ο Γιάννης και ο Χάρης, φτάνουν στην πλατεία Ελευθερίας στις 7:00 το πρωί με προορισμό τις Βούτες.

- α')** Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να δουν το πρώτο μεταφορικό μέσο να φτάνει στην πλατεία;

Εφόσον οι αφίξεις συμβαίνουν σε συνεχή χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι εκθετικά κατανομημένοι, μιλάμε για στοχαστικές διαδικασίες Poisson με παραμέτρους λ_1 για τα ταξί και λ_2 για τα λεωφορεία αντίστοιχα. Η συνολική σ.δ. με την οποία καταφθάνουν τα μεταφορικά μέσα στην πλατεία θα είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1 + \lambda_2$ (από θεωρία). Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος από τις 7:00 ως την πρώτη άφιξη μεταφορικού μέσου ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$. Άρα, το ζητούμενο μέσο χρονικό διάστημα θα είναι

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

(Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο χρόνος T_1 ως την πρώτη άφιξη σε σ.δ. Poisson είναι μια εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ και μέση τιμή $E[T_1] = \frac{1}{\lambda}$.)

- β')** Ποιο είναι το μέσο πλήθος των ταξί που φτάνουν στην πλατεία μεταξύ 7:10 και 7:35;

Μας ζητείται ο μέσος αριθμός αφίξεων ταξί σε χρονικό διάστημα μήκους $\tau = 25$ λεπτών. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η συγκεκριμένη τ.μ. ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\tau\lambda_1 = 25\lambda_1$. Συνεπώς, το μέσο πλήθος είναι $25\lambda_1$ ταξί.

- γ')** Ποια είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς 3 λεωφορεία φτάνουν στην πλατεία στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος διάρκειας 10 λεπτών;

Εφόσον και πάλι μας ζητείται η πιθανότητα αριθμού αφίξεων σε συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος, οι αφίξεις αυτές θα ακολουθούν και εδώ κατανομή Poisson.

Έστω N_{10} το πλήθος των λεωφορείων που φτάνουν στην πλατεία σε διάρκεια 10 λεπτών. Τότε $N_{10} \sim \text{Poisson}(10\lambda_2)$.

Συνεπώς,

$$P_{N_{10}}(3) = P(3, 10) = \frac{(10\lambda_2)^3 e^{-10\lambda_2}}{3!}.$$

- δ')** Ποια είναι η πιθανότητα ότι το πρώτο μεταφορικό μέσο που θα δουν είναι ταξί και ποια η πιθανότητα ότι θα είναι λεωφορείο;

Από τις ιδιότητες συγχώνευσης / διαίρεσης για σ.δ Poisson έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\text{πρώτο όχημα ταξί}) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ P(\text{πρώτο όχημα λεωφορείο}) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

Για τα ταξί/λεωφορεία, οι χρόνοι της διαδρομής έως τις Βούτες (σε λεπτά της ώρας) είναι ανεξάρτητες τ.μ. εκθετικά κατανομημένες με παράμετρο μ_1/μ_2 αντίστοιχα.

- ε') Υποθέτουμε ότι οι δύο φίλοι φτάνουν στην πλατεία στις 7:00, παίρνουν το πρώτο μεταφορικό μέσο που περνάει προς τις Βούτες και φτάνουν στο Πανεπιστήμιο X λεπτά μετά τις 7:00. Υπολογίστε τη μέση τιμή της X , καθώς και τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της X .

Έχουμε $X = W + D$, όπου W είναι το χρονικό διάστημα ως την άφιξη του πρώτου μεταφορικού μέσου και D είναι ο χρόνος της διαδρομής ως τις Βούτες. Προφανώς,

$$W \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$D/\text{ταξί} \sim \exp(\mu_1)$$

$$D/\text{λεωφ.} \sim \exp(\mu_2)$$

Έχουμε για τη μέση τιμή :

$$\begin{aligned} E[X] &= E[W + D] \\ &= E[W] + E[D] \\ &= E[W] + P(\text{ταξί}) \cdot E[D/\text{ταξί}] + P(\text{λεωφ.}) \cdot E[D/\text{λεωφ.}] \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{1}{\mu_2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) \end{aligned}$$

Υπενθύμιση :

Θεώρημα Ολικής Μέσης Τιμής

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ μια διαμέριση του Ω

$$E[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot E[X/A_i]$$

και για τη ροπογεννήτρια:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= M_{W+D}(s) \\ &= M_W(s) \cdot M_D(s) \\ &= M_W(s) \cdot (P(\text{ταξί}) \cdot M_{D_T}(s) + P(\text{λεωφ.}) \cdot M_{D_\Lambda}(s)) \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - s} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_1 - s} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 - s} \cdot \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{\mu_1 - s} + \frac{\lambda_2 \mu_2}{\mu_2 - s} \right) \end{aligned}$$

Υπενθύμιση :

Ροπογεννήτρια εκθετικής τ.μ. με παράμετρο λ

$$M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$$

- στ') Υποθέτουμε ότι ένα ταξί και ένα λεωφορείο φτάνουν ακριβώς την ίδια στιγμή στην πλατεία. Ο Γιάννης μπαίνει στο ταξί ενώ ο Χάρης μπαίνει στο λεωφορείο. Έστω Y το χρονικό διάστημα από την αναχώρησή τους από την πλατεία έως τη στιγμή που συναντιούνται ξανά στις Βούτες. Υπολογίστε τη μέση τιμή της Y .

$Y = Y_1 + Y_2$, όπου $Y_1 = \min(D_T, D_\Lambda)$ είναι ο χρόνος της διαδρομής του οχήματος που φτάνει πρώτο στις Βούτες και Y_2 είναι ο επιπλέον χρόνος από την άφιξη του πρώτου οχήματος έως την άφιξη και του δεύτερου οχήματος.

Προφανώς,

$$Y_1 \sim \exp(\mu_1 + \mu_2) \quad (\text{Συγχωνευμένη } \sigma.\delta. \text{ χρόνου διαδρομής για λεωφ./ταξί})$$

$$Y_2/D_T < D_\Lambda \sim \exp(\mu_2) \quad (\text{Το λεωφορείο φτάνει 2ο})$$

$$Y_2/D_T > D_\Lambda \sim \exp(\mu_1) \quad (\text{Το ταξί φτάνει 2ο})$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[Y_1] + E[Y_2] \\ &= E[Y_1] + P(D_T < D_\Lambda) \cdot E[Y_2/D_T < D_\Lambda] + P(D_T > D_\Lambda) \cdot E[Y_2/D_T > D_\Lambda] \\ &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_1} \\ &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \end{aligned}$$

Υπάρχουν δύο είδη λεωφορείων: τα εξπρές και τα κανονικά. Κάθε λεωφορείο που φτάνει στην πλατεία είναι εξπρές με πιθανότητα p και κανονικό με πιθανότητα $1 - p$.

ζ) Αν οι δύο φίλοι περιμένουν στην πλατεία συζητώντας για 20 λεπτά, πόσα εξπρές λεωφορεία θα περάσουν κατά μέσο όρο;

Τα εξπρές λεωφορεία περνούν σύμφωνα με μία Poisson $\sigma.\delta.$ με ένταση $p\lambda_2$. Συνεπώς, το πλήθος που περνά σε 20 λεπτά είναι Poisson τ.μ. με παράμετρο $20p\lambda_2$ και μέση τιμή $20p\lambda_2$.

η) Αν ξεχαστούν συζητώντας, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα περάσουν από μπροστά τους k εξπρές λεωφορεία πριν περάσουν k κανονικά;

Το ζητούμενο γεγονός είναι να περάσουν k ή περισσότερα εξπρές λεωφορεία και το πολύ $k - 1$ κανονικά, από συνολικά $k + k - 1 = 2k - 1$ λεωφορεία, δηλαδή:

$$\sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i (1-p)^{2k-1-i}.$$

(Ουσιαστικά έχουμε αριθμό επιτυχιών k σε n ανεξάρτητες δοκιμές. Αυτή η τ.μ. είναι Διωνυμική με παραμέτρους p, n και $\sigma.\pi.\pi$:

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Εδώ, έχουμε άθροισμα Διωνυμικών, γιατί το k δεν είναι σταθερό.)