

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2016

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

7ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Φωτιάδου

Άσκηση 1.

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με έξι καταστάσεις $S_0, S_1, \dots, S_5$ περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

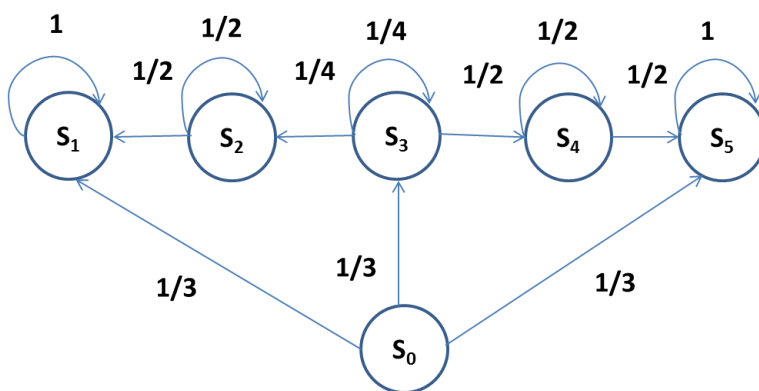
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Δώστε το γράφημα της αλυσίδας. Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση S_0 , υπολογίστε την πιθανότητα ότι:

- (α) Το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή k .
- (β) Το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την S_4 .
- (γ) Το σύστημα επισκέπτεται την S_2 και κατόπιν την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή.
- (δ) Το σύστημα επισκέπτεται την S_1 για πρώτη φορά σε χρόνο $n = 3$.
- (ε) Το σύστημα βρίσκεται στην S_3 αμέσως μετά την n -οστή χρονική στιγμή.

Λύση

Το γράφημα της αλυσίδας παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1: Μαρκοβιανη Αλυσίδα Άσκησης 1.

(α) Θεωρούμε το ενδεχόμενο A_k : "Το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή k ".

Για να εμφανισθεί το A_k θα πρέπει να επισκεφθεί την S_3 τη χρονική στιγμή 0, να μείνει για τις επόμενες $k - 2$ και τελικά να επισκεφθεί την S_2 τη χρονική στιγμή k .

Επομένως έχουμε:

$$P(A_k) = P_{03} \cdot P_{33}^{k-2} \cdot P_{32} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

(β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο A : "Το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την S_4 ". Μπορούμε να το πετύχουμε με τρεις τρόπους.

- 1ος τρόπος: Μετάβαση από το S_0 στο S_1
Η αντίστοιχη πιθανότητα μετάβασης είναι: $1/3$.
- 2ος τρόπος: Μετάβαση από το S_0 στο S_5
Η αντίστοιχη πιθανότητα μετάβασης είναι: $1/3$.
- 3ος τρόπος: Το A εμφανίζεται εάν η πρώτη μετάβαση είναι από το S_0 στο S_3 και μετά στο S_2 .
Η πιθανότητα μετάβασης από το S_0 στο S_3 είναι: $1/3$.
Δεδομένου ότι πραγματοποιείται αυτή η μετάβαση, η πιθανότητα να επισκεφθεί την S_2 είναι:
 $\frac{1/4}{1/4+1/2} = 1/3$

Συνολικά: Η πιθανότητα μετάβασης από το S_0 στο S_3 και μετά στο S_2 είναι: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα: "Να μην επισκέπτεται ποτέ την S_4 " είναι:

$$P(A) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

(γ) Έστω B : "Το ενδεχόμενο το σύστημα να επισκέπτεται την S_2 και να την εγκαταλείπει την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή".

Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(B) = P(\text{επίσκεψη στην } S_2) \cdot P(\text{εγκαταλείπει την } S_2 / \text{βρίσκεται στην } S_2) =$$

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} P(A_k) \right) \cdot \frac{1}{2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{18}$$

(δ) Για να επισκέπτεται το σύστημα την S_1 για πρώτη φορά σε χρόνο $n = 3$, θα πρέπει να γίνουν οι μεταβάσεις:

$$S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$$

Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(\text{επισκέπτεται το } S_1 \text{ για πρώτη φορά για } t = 3) = p_{03} \cdot p_{32} \cdot p_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

(ε) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: "Το σύστημα βρίσκεται στη κατάσταση S_3 αμέσως μετά τη n -οστή χρονική στιγμή".

$$P(\text{επίσκεψη στο } S_3 \text{ αμέσως μετά τη χρονική στιγμή } N) =$$

$$P(\text{επισκέπτεται το } S_3 \text{ τη χρονική στιγμή } 1 \text{ και μένει για τις επόμενες } N-1 \text{ στιγμές}) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Άσκηση 2.

Η Μαρία έχει δύο κέρματα. Το κέρμα Α φέρνει κεφαλή (Κ) με πιθανότητα a , ενώ το κέρμα Β φέρνει κεφαλή με πιθανότητα b . Αν στην n -στή ρίψη η Μαρία φέρει κεφαλή, στη $(n+1)$ -στή ρίψη θα χρησιμοποιήσει το κέρμα Α, αλλιώς θα χρησιμοποιήσει το κέρμα Β. Ορίστε τις καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη αυτού του πειράματος, υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης, δώστε το γράφημα, και υπολογίστε την οριακή κατανομή της αλυσίδας. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η k -στή ρίψη θα φέρει κεφαλή, για αρκετά μεγάλο k ;

(α) Να δώσετε τις καταστάσεις της αλυσίδας Markov που περιγράφει το πείραμα, το γράφημα της αλυσίδας και καθώς και τις πιθανότητες μεταβάσης και την οριακή κατανομή της πιθανότητας.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι στην k -οστή ρίψη θα φέρει κεφαλή, για k αρκετά μεγάλο.

Λύση

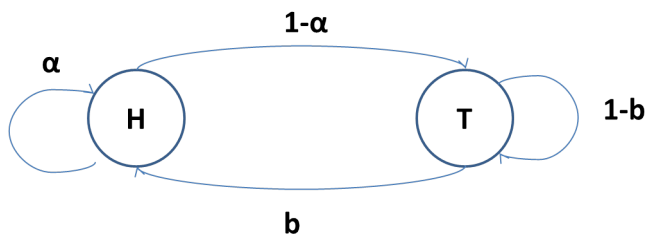
(α) Για να μοντελοποιήσουμε το σύστημά μας χρησιμοποιώντας μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, ορίζουμε τις καταστάσεις:

- H: "Κεφαλή"
- T: "Γράμματα"

Οπότε, οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης θα είναι:

$$p_{HH} = a, \quad p_{HT} = 1 - a, \quad p_{TH} = b, \quad p_{TT} = 1 - b$$

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα του συστήματος περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2: Μαρκοβιανη Αλυσίδα Άσκησης 2.

(β) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: "Στην k -οστή ρίψη να φέρει κεφαλή για μεγάλο k ".

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε:

$$p_{HT} \cdot \pi_H = p_{TH} \cdot \pi_T,$$

όπου:

π_H : είναι η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης (steady state) όπου η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση H, και:

π_T : είναι η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης (steady state) όπου η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση T.

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (1 - a) \cdot \pi_H &= b \cdot \pi_T \Leftrightarrow \\ \pi_H &= a \cdot \pi_H + b \cdot \pi_T \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\pi_T = (1 - a) \cdot \pi_H + (1 - b) \cdot \pi_T$$

Και :

$$\pi_H + \pi_T = 1$$

Επομένως έχουμε :

$$\pi_H = \frac{b}{(1 - \alpha + b)}$$

Άσκηση 3.

Δύο εταιρίες ανταγωνίζονται η μια την άλλη στην αγορά αναψυκτικών.

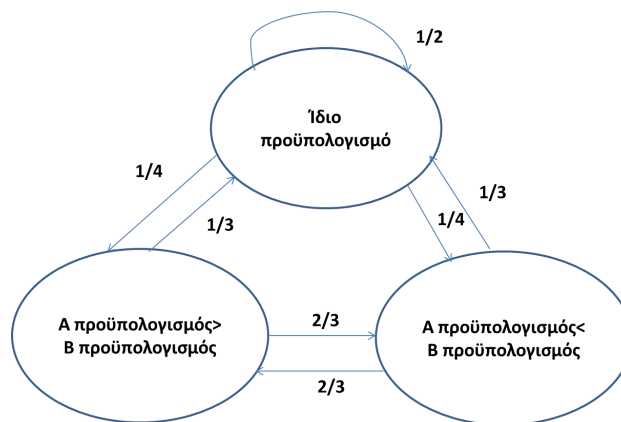
- Αν κάποια χρονιά έχουν τον ίδιο προϋπολογισμό για διαφήμιση, υπάρχει 50% πιθανότητα ότι θα έχουν τον ίδιο προϋπολογισμό την επόμενη χρονιά.
- Αν δεν έχουν τον ίδιο προϋπολογισμό, υπάρχει ίση πιθανότητα ότι κάποια από τις δύο εταιρίες θα ξοδέψει περισσότερα.
- Αν η πρώτη εταιρία ξοδέψει περισσότερα την πρώτη χρονιά, την επόμενη χρονιά η άλλη εταιρία θα ξοδέψει περισσότερα με πιθανότητα 2/3, ενώ θα ξοδέψουν το ίδιο με πιθανότητα 1/3.

(α) Να μοντελοποιηθεί το σύστημα με Μαρκοβιανή αλυσίδα.

(β) Ποια είναι η οριακή πιθανότητα ότι σε ένα χρόνο, στο απώτερο μέλλον οι δυο εταιρίες θα έχουν ίδιους προϋπολογισμούς διαφήμισης;

Λύση

(α) Η Μαρκοβιανή αλυσίδα του συστήματος απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 3: Μαρκοβιανη Αλυσίδα Άσκησης 1.

(β) Έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \pi_1 + \frac{1}{3} \cdot \pi_2 + \frac{1}{3} \cdot \pi_3 &= \pi_1 \\ \frac{1}{4} \cdot \pi_1 + \frac{2}{3} \cdot \pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{1}{4} \cdot \pi_1 + \frac{2}{3} \cdot \pi_2 &= \pi_3 \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι :

$$\sum_i \pi_i = 1$$

Επομένως, λύνοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε ότι :

$$\pi_1 = \frac{4}{10}, \quad \pi_2 = \frac{3}{10}, \quad \pi_3 = \frac{3}{10}$$

Η οριακή πιθανότητα ότι σε ένα χρόνο στο απώτερο μέλλον οι δύο εταιρίες θα έχουν ίδιους προϋπολογισμούς διαφήμισης είναι 40%.