

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 8
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Άσκηση 1.

Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με επτά καταστάσεις έχει τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης:

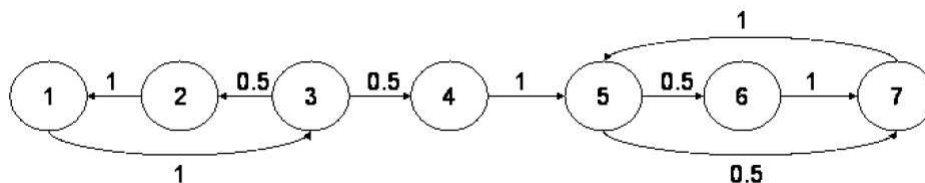
$$p_{i,j} = \begin{cases} 0.5, & (i,j) = (3,2), (3,4), (5,6), (5,7) \\ 1, & (i,j) = (1,3), (2,1), (4,5), (6,7), (7,5) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω X_k η κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας τη χρονική στιγμή k .

- α) Δώστε το γράφημα της αλυσίδας
- β) Για ποιες τιμές του n έχουμε θετικές πιθανότητες μετάβασης n -οστής τάξης από την κατάσταση 1 στην 5, $r_{15}(n) = P(X_n = 5 / X_0 = 1) > 0$;
- γ) Βρείτε το σύνολο $A(i)$ των καταστάσεων που είναι προσιτές από την κατάσταση i για κάθε $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
- δ) Βρείτε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση, αποφασίστε αν είναι περιοδική (και με ποια περίοδο) ή απεριοδική.
- ε) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μεταβάσεων με μη μηδενική πιθανότητα που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα, ώστε και οι 7 καταστάσεις να αποτελούν μια μοναδική κλάση επικοινωνίας;

Λύση.

- α) Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1.

- β) Το ζητούμενο μπορεί να μεταφραστεί και ως: Με πόσους δυνατούς τρόπους και για ποιες τιμές του n , μπορούμε να φτάσουμε από την κατάσταση 1 στην 5;

Από την κατάσταση 1 περνάμε στην κατάσταση 5, μέσω τουλάχιστον τριών μεταβάσεων: $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5)$. Τα μονοπάτια από την κατάσταση 1 στην 5, περικλείουν επίσης μονοπάτια με ανακύκλωση από την κατάσταση 1 πίσω στην 1 μεγέθους 3: $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$, ή/και μονοπάτια με ανακύκλωση από την κατάσταση 5 πίσω στην 5, μέσω της κατάστασης 7. Τα μονοπάτια αυτά θα είναι είτε μεγέθους 2: $(5 \rightarrow 7 \rightarrow 5)$, είτε μεγέθους 3: $(5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5)$.

Επομένως, τα δυνατά μεγέθη μονοπατιών είναι:

$$3 + 3k + 2m + 3n, \quad \text{για } k, m, n \geq 0.$$

Άρα τελικά,

$$r_{15} > 0, \quad \text{για } n = 3 \text{ ή } n \geq 5$$

- γ') • $i = 1$: $A(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 • $i = 2$: $A(2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 • $i = 3$: $A(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Υπάρχει ένα μονοπάτι μη-μηδενικής πιθανότητας από τις καταστάσεις $i = 1, 2, 3$, μέσω της κατάστασης 3, σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση.

- $i = 4$: $A(4) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 5$: $A(5) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 6$: $A(6) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 7$: $A(7) = \{5, 6, 7\}$

- δ') Οι καταστάσεις 5, 6, 7 είναι έμμονες, διότι μπορούμε να φτάσουμε σε αυτές από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση (είναι δηλαδή προσιτές από όλες τις καταστάσεις). Οι καταστάσεις 1, 2, 3, 4 δεν είναι προσιτές από τις 5, 6, 7 και είναι μεταβατικές. Μόλις το σύστημα μεταβεί στις 5, 6, 7 δε μπορεί να επιστρέψει στις 1, 2, 3, 4. Οι καταστάσεις 5, 6, 7 σχηματίζουν μια κλάση επικοινωνίας (επικοινωνούν όλες μεταξύ τους, αλλά καμία με τις εξωτερικές καταστάσεις). Από την 5 επιστρέφουμε πίσω στην 5 με:

- 2 μεταβάσεις: $(5 \rightarrow 7 \rightarrow 5)$
- 3 μεταβάσεις: $(5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5)$

Το σύστημα επιστρέφει στην 5 μετά από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 2$ απεριοδικό.

Προσοχή: Οι καταστάσεις 1, 2, 3 δεν αποτελούν κλάση επικοινωνίας, διότι οι καταστάσεις σε μια κλάση επικοινωνίας θα πρέπει να είναι έμμονες και αυτές δεν είναι. Π.χ. αν το σύστημα μεταβεί από την 3 στην 4 δεν υπάρχει επιστροφή.

Υπενθύμιση

Έμμονες καταστάσεις: Προσιτές από όλες τις καταστάσεις της κλάσης τους, αλλά όχι από καταστάσεις άλλων κλάσεων.

Μεταβατικές καταστάσεις: Δεν είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας. Μεταβαίνουν κάπου και το σύστημα δε γυρίζει πίσω.

- ε') Μια μετάβαση πρέπει να προστεθεί για τη δημιουργία μιας μοναδικής κλάσης επικοινωνίας. Π.χ. προσθέτοντας μια μετάβαση από την 5 στην 3 θα επιτρέπαμε τη μετάβαση σε κάθε κατάσταση από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Οποιαδήποτε μετάβαση από την κλάση επικοινωνίας των 5, 6, 7 σε κάποια από τις 1, 2, 3 θα πετύχαινε τον ίδιο στόχο.

Άσκηση 2.

Στο γκαράζ του Πανεπιστημίου έχει εγκατασταθεί μία μπάρα η οποία λειτουργεί με κάρτες και δυστυχώς κινδυνεύει από το προσωπικό και τους καθηγητές. Συγκεκριμένα, κάθε μέρα ένα αυτοκίνητο προσκρούει στην μπάρα με πιθανότητα p και στην περίπτωση αυτή μία καινούρια μπάρα πρέπει να εγκατασταθεί. Επίσης, μία μπάρα η οποία λειτουργεί για m μέρες αντικαθίσταται από μία νέα για λόγους καλής λειτουργίας.

α') Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως τη λειτουργία του συστήματος της μπάρας του γκαράζ. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

β') Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας

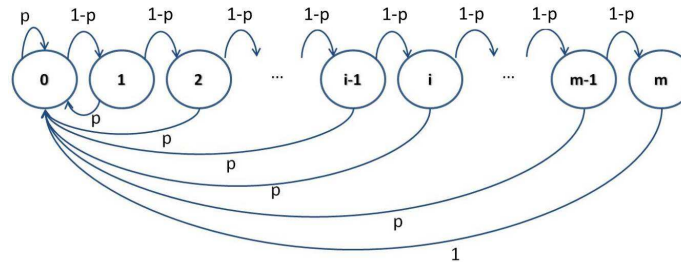
γ') Σε βάθος χρόνου (μακροπρόθεσμα), ποια είναι η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα; Με τι ισούται αυτή η συχνότητα όταν η διάρκεια m της φυσικής ζωής της μπάρας είναι πολύ μεγάλη;

Λύση.

α') Ορίζουμε $m + 1$ καταστάσεις $\{0, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ ως εξής:

Κατάσταση i : 'Η μπάρα βρίσκεται σε λειτουργία για i μέρες.' $i = 0, 1, \dots, m$.

Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα 2:



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 2.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

β') Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή: $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$ όπου $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m]$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p + \pi_1 p + \dots + \pi_{m-1} p + \pi_m \\ \pi_1 &= \pi_0 (1-p) \\ \pi_2 &= \pi_1 (1-p) = \pi_0 (1-p)^2 \\ \pi_3 &= \pi_2 (1-p) = \pi_0 (1-p)^3 \\ &\vdots \\ \pi_i &= \pi_{i-1} (1-p) = \pi_0 (1-p)^i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

Αλλά

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_m = \pi_0 + \pi_0(1-p) + \dots + \pi_0(1-p)^m \\ = \pi_0 \sum_{i=0}^m (1-p)^i = \pi_0 \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{1 - (1-p)}$$

Άρα

$$\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}$$

και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε τελικά :

$$\pi_i = \frac{p(1-p)^i}{1 - (1-p)^{m+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

γ') Μακροπρόθεσμα, η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα ισούται με τη συχνότητα επισκέψεων της κατάστασης 0 (όπου η μπάρα λειτουργεί για 0 μέρες, δηλαδή μόλις έχει αντικατασταθεί), που είναι

$$\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}.$$

Καθώς $m \rightarrow \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_0 = p$.

Με άλλα λόγια, για πολύ μεγάλη διάρκεια φυσικής ζωής της μπάρας ($m \rightarrow \infty$) (δηλαδή για καλή ποιότητα του εξαρτήματος), η συχνότητα αντικατάστασής της ισούται με την πιθανότητα p με την οποία ο χρήστης της προκαλεί ζημιά.

Άσκηση 3.

Στη Μαρία αρέσει να τζογάρει. Πηγαίνει λοιπόν στο Las Vegas και αρχίζει με 200 € στην τσέπη. Σε κάθε προσπάθεια μπορεί να ποντάρει είτε 100 είτε 200 € (αν έχει αρκετά λεφτά). Κερδίζει με πιθανότητα p . Στόχος της είναι να διπλασιάσει τα λεφτά της και να φύγει με 400 €. Σταματάει όταν επιτύχει το στόχο της ή όταν χάσει τα λεφτά της.

α') Όποτε η Μαρία έχει μόνο 100 €, προφανώς μπορεί να ποντάρει μόνο 100 €. Επίσης, ποντάρει 100 € όποτε έχει 300 €. Βοηθήστε την να αποφασίσει σε μία στρατηγική για το πόσα λεφτά να ποντάρει όταν έχει 200 €, ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να κερδίσει (δηλαδή να φύγει με τα 400 €). Με άλλα λόγια, όταν έχει 200 €, πρέπει να ποντάρει 100 ή 200 €.

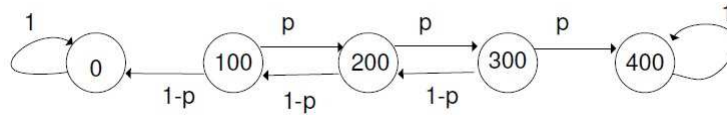
Βοήθεια : Αναλύστε τις περιπτώσεις για τις 2 στρατηγικές. Η περίπτωση που ποντάρει 200 € είναι εύκολη. Για την περίπτωση που ποντάρει 100 €, σχηματίστε το γράφημα της κατάλληλης αλυσίδας Markov.

β') Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών μέχρις ότου χάσει τα λεφτά της ή τα διπλασιάσει για $p = 0.75$ και ακολουθώντας τη βέλτιστη στρατηγική.

Λύση.

α') Αναλύουμε τις 2 στρατηγικές:

- 1η στρατηγική: Η Μαρία ποντάρει τα 200€ και είτε διπλασιάζει με πιθανότητα p και φεύγει, είτε χάνει με πιθανότητα $1 - p$ και φεύγει.
- 2η στρατηγική: Η Μαρία ποντάρει τα 100€ από τα 200€ που είχε αρχικά. Η αλυσίδα Markov δίδεται στο Σχήμα 3:



Σχήμα 3: Μαρκοβιανή αλυσίδα στην περίπτωση όπου η Μαρία αρχικά ποντάρει 100€.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η Μαρία τελικά να κερδίσει, δεδομένου ότι ξεκίνησε με 200€. Θέλουμε δηλαδή να καταλήξουμε στην έμμονη κατάσταση 400. Αυτή είναι μία κατάσταση απορροφήσεως (absorbing state).

Υπενθύμιση:

Γενικά για μια αλυσίδα Markov οι πιθανότητες απορροφήσεως α_i της αλυσίδας από την κατάσταση s , ξεκινώντας από την i είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned}\alpha_s &= 1 \\ \alpha_i &= 0, \quad \text{για κάθε κατάσταση απορροφήσεως } i \neq s \\ \alpha_j &= \sum_{i=1}^m p_{ij} \alpha_i, \quad \text{για κάθε μεταβατική κατάσταση } j\end{aligned}$$

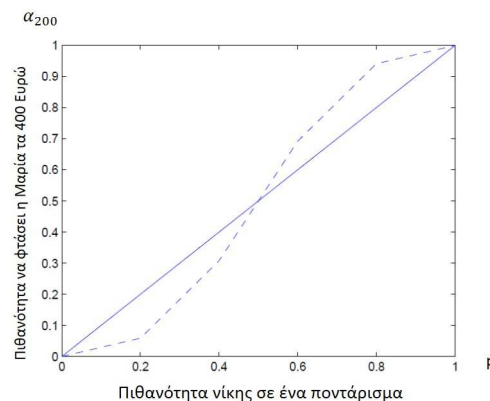
Εδώ, οι έμμονες καταστάσεις είναι οι 0 και 400. Θέλουμε το σύστημα να απορροφηθεί από την 400 (να κερδίσει η Μαρία), άρα:

$$\begin{aligned}\alpha_s &= 1, \quad \text{τελική κατάσταση } s = 400 \\ \alpha_i &= 0, \quad \text{κατάσταση απορροφήσεως } i = 0 \neq s \\ \alpha_{100} &= p_{100 \rightarrow 0} \cdot \alpha_0 + p_{100 \rightarrow 200} \cdot \alpha_{200} = (1-p) \cdot \alpha_0 + p \cdot \alpha_{200} = p \cdot \alpha_{200} \\ \alpha_{200} &= p_{200 \rightarrow 100} \cdot \alpha_{100} + p_{200 \rightarrow 300} \cdot \alpha_{300} = (1-p) \cdot \alpha_{100} + p \cdot \alpha_{300} \\ \alpha_{300} &= p_{300 \rightarrow 200} \cdot \alpha_{200} + p_{300 \rightarrow 400} \cdot \alpha_{400} = (1-p) \cdot \alpha_{200} + p \cdot 1\end{aligned}$$

Εξετάζουμε το ενδεχόμενο το σύστημα να απορροφηθεί από την κατάσταση $s = 400$, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την $i = 200$, δηλαδή μας ενδιαφέρει η α_{200} . Λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς α_{200} και έχουμε:

$$\alpha_{200} = \frac{p^2}{1 - 2p + 2p^2}$$

Στην πρώτη στρατηγική, όπως είπαμε, η Μαρία κερδίζει με πιθανότητα p , ενώ στη δεύτερη με πιθανότητα α_{200} , άρα θα πρέπει να συγκρίνουμε τις δύο αυτές πιθανότητες για να δούμε ποια υπερिशύχει, Σχήμα 4:



Σχήμα 4: Η συνεχόμενη γραμμή εκφράζει την πρώτη στρατηγική (ποντάρω όσα χρήματα έχω), ενώ η διακεκομμένη τη δεύτερη στρατηγική (ποντάρω 100€, ενώ έχω 200).

Από το διάγραμμα μπορούμε να δούμε ότι η πρώτη στρατηγική είναι προτιμότερη όταν $p < \frac{1}{2}$, ενώ η δεύτερη είναι προτιμότερη όταν $p > \frac{1}{2}$. Για $p = \frac{1}{2}$ οι δύο στρατηγικές δε διαφοροποιούνται.

β') Υπενθύμιση:

Μέσοι χρόνοι απορροφήσεως μ_i ξεκινώντας από την κατάσταση i είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned}\mu_i &= 0, \quad \text{για κάθε έμμονη κατάσταση } i \\ \mu_i &= 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} \mu_j, \quad \text{για κάθε μεταβατική κατάσταση } i\end{aligned}$$

Εδώ, έστω μ_i ο μέσος αριθμός προσπαθειών που ζητούμε, ξεκινώντας από την κατάσταση i .

Έχουμε,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \mu_{400} = 0 \quad (\text{έμμονες καταστάσεις}) \\ \mu_{100} &= 1 + p_{100 \rightarrow 0} \cdot \mu_0 + p_{100 \rightarrow 200} \cdot \mu_{200} = 1 + p \cdot \mu_{200} \\ \mu_{200} &= 1 + p_{200 \rightarrow 100} \cdot \mu_{100} + p_{200 \rightarrow 300} \cdot \mu_{300} = 1 + (1-p) \cdot \mu_{100} + p \cdot \mu_{300} \\ \mu_{300} &= 1 + p_{300 \rightarrow 200} \cdot \mu_{200} + p_{300 \rightarrow 400} \cdot \mu_{400} = 1 + (1-p) \cdot \mu_{200}\end{aligned}$$

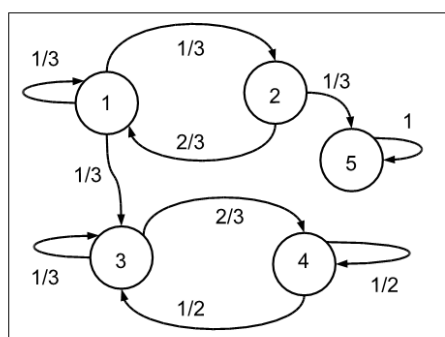
Άρα, για $p = 0.75$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\mu_{100} &= 3.4, \quad \text{η πιθανότητα να χάσει ή να διπλασιάσει | ξεκίνησε με 100€} \\ \mu_{200} &= 3.2, \quad \text{η πιθανότητα να χάσει ή να διπλασιάσει | ξεκίνησε με 200€} \\ \mu_{300} &= 1.8, \quad \text{η πιθανότητα να χάσει ή να διπλασιάσει | ξεκίνησε με 300€}\end{aligned}$$

Ο μέσος αριθμός προσπαθειών που μας ζητείται είναι ο $\mu_{200} = 3.2$.

Άσκηση 4.

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα που φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Μαρκοβιανή αλυσίδα για την Άσκηση 4.

- α')** Ποιες είναι οι έμμονες και μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας; Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και αν είναι περιοδικές ή όχι.
- β')** Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_1 = 2, X_2 = 5 | X_0 = 1)$.
- γ')** Υπάρχουν οι οριακές (στατικές) πιθανότητες δεδομένου ότι η αλυσίδα αρχίζει στην κατάσταση 3 ($X_0 = 3$); Ποιες είναι αυτές;
- δ')** Δεδομένου ότι η αλυσίδα αρχίζει στην κατάσταση 3, ποια είναι η πιθανότητα ότι η n -οστή μετάβαση θα είναι μία αυτομετάβαση (μετάβαση στην ίδια κατάσταση); Υποθέστε ότι το n είναι πολύ μεγάλο.

Ορίζουμε το χρόνο T ως το πρώτο n για το οποίο ισχύει ότι $X_n \in 3, 4, 5$.

ε') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_T = 5 | X_0 = 1)$.

στ') Όσο η κατάσταση του συστήματος είναι η 1 ή η 2, λαμβάνουμε τόσα ευρώ όσα η τωρινή κατάσταση. Έστω v_i το αναμενόμενο ποσό που λαμβάνουμε όταν η αρχική κατάσταση είναι η i ($i = 1, 2$). Γράψτε το σύστημα των εξισώσεων που θα σας επιτρέψουν να υπολογίσετε τα v_1 και v_2 . Ποιο είναι το μέσο κέρδος σας για κάθε μία από τις αρχικές καταστάσεις 1 και 2;

Λύση.

α') Παρατηρούμε το γράφημα και βλέπουμε ότι η αλυσίδα έχει δύο μεταβατικές καταστάσεις τις 1 και 2 και τρεις έμμονες, τις 3, 4 και 5. Οι 3, 4 αποτελούν μια επαναληπτική κλάση, ενώ η 5 από μόνη της μια άλλη κλάση. Δεν υπάρχουν περιοδικές καταστάσεις.

β') Πολύ απλά, $P(X_1 = 2, X_2 = 5 | X_0 = 1) = p_{12} \cdot p_{25} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

γ') Λύνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για την κλάση 3, 4:

$$\begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4.$$

Μαζί με την $\pi_3 + \pi_4 = 1$, παίρνουμε ότι $\pi_3 = \frac{3}{7}$ και $\pi_4 = \frac{4}{7}$.

δ') Αφού βρισκόμαστε μέσα στην κλάση $\{3, 4\}$, έχουμε αυτομετάβαση όποτε συμβαίνει μετάβαση από την 3 στην 3 ή από την 4 στην 4. Μακροπρόθεσμα, η πιθανότητα του πρώτου γεγονότος είναι $\frac{1}{3}\pi_3$ και του δεύτερου είναι $\frac{1}{2}\pi_4$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 = \frac{3}{7}.$$

ε') Η $P(X_T = 5 | X_0 = 1)$ είναι πολύ απλά η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την κατάσταση $s = 5$ ξεκινώντας από την $i = 1$. Οι πιθανότητες απορρόφησης ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= 1, & \text{Τελική κατάσταση} \\ \alpha_3 &= \alpha_4 = 0, & \text{Άλλες καταστάσεις απορροφήσεως} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{3} \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} \cdot \alpha_2 + \frac{1}{3} \cdot \alpha_3 \\ \alpha_2 &= \frac{2}{3} \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} \cdot \alpha_5 \end{aligned}$$

Λύνοντας, παίρνουμε: $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Συνεπώς, $P(X_T = 5 | X_0 = 1) = \alpha_1 = \frac{1}{4}$.

στ') Προφανώς, το αναμενόμενο κέρδος εξαρτάται από το μέσο χρόνο έως την απορρόφηση του συστήματος (ξεκινώντας από τις 1 ή 2):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \mu_1 + \frac{1}{3} \cdot \mu_2 : & \text{Μέσο \# μεταβάσεων έως την απορρόφηση ξεκινώντας από την 1.} \\ \mu_2 &= 1 + \frac{2}{3} \cdot \mu_1 : & \text{Μέσο \# μεταβάσεων έως την απορρόφηση ξεκινώντας από τη 2.} \end{aligned}$$

Αλλά κερδίζουμε 1€ για κάθε μετάβαση στην 1 και 2€ για κάθε μετάβαση στη 2. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + \frac{1}{3} \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 \\ v_2 &= 2 + \frac{2}{3} \cdot v_1 \end{aligned}$$

άρα λύνοντας έχουμε $v_1 = 3.75\text{€}$ και $v_2 = 4.5\text{€}$.