

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

9ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Φωτιάδου

ΘΕΩΡΙΑ: Σύντομη Επανάληψη στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Ορισμός Μαρκοβιανών Μοντέλων

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καθορίζεται πλήρως προσδιορίζοντας:

- Το σύνολο των καταστάσεων $S = 1, 2, \dots, m$
- Το σύνολο των δυνατών μεταβάσεων, δηλαδή εκείνα τα ζευγάρια (i, j) για τα οποία $p_{ij} > 0$.
- Τις μεταβατικές τιμές των p_{ij} που είναι θετικές.

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που ορίζεται από αυτό το μοντέλο είναι μια ακολουθία τ.μ $X_0, X_1, \dots, X_m$ που παίρνουν τιμές στο S και οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη: $P(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p_{ij}, \forall n, \forall i, j \in S, \forall$ πιθανή ακολουθία προγενέστερων καταστάσεων.

Τα στοιχεία μιας αλυσίδας μπορούν να κωδικοποιηθούν στο λεγόμενο πίνακα μετάβασης $m \times m$ με (i, j) στοιχείο το $p_{i,j}$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα

Οποιαδήποτε πληροφορία για τις προγενέστερες καταστάσεις $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ είναι περιττή όσον αφορά να συμβεί κάτι για την κατάσταση X_{n+1} , εφόσον γνωρίζουμε την X_n της σ.δ την τελευταία στιγμή n . Μαθηματικά:

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}, \forall n, \forall i, j \in S,$$

και για κάθε πιθανή ακολουθία $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$ προηγούμενων καταστάσεων.

Δηλαδή, ο πιθανοτικός νόμος της επόμενης κατάστασης X_{n+1} , εξαρτάται μόνο μέσω της τιμής της παρούσας κατάστασης X_n από το παρελθόν.

Πιθανότητες Μετάβασης Ανώτερης Τάξης

Ορίζουμε ως $r_{ij}(n) = P(X_n = j / X_0 = i)$ την πιθανότητα ότι η κατάσταση μετά από n χρονικά βήματα θα είναι j , δεδομένου ότι η παρούσα κατάσταση είναι i .

Steady State

Η πιθανότητα μια κατάσταση να συμβεί στο μακρινό μέλλον, δηλαδή για $n \rightarrow \infty$. Τότε, το r_{ij} θα συγκλίνει σε ένα όριο, το οποίο δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση.

Absorbing Καταστάσεις: (απορροφητικές καταστάσεις)

Είναι οι καταστάσεις εκείνες που επαναλαμβάνονται συνεχώς μόλις τις επισκεφτούμε. Δεδομένου αρκετού χρόνου, είναι σίγουρο πως θα συμβούν. Το όριό τους για $n \rightarrow \infty$ είναι 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Άσκηση 1.**

Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις: '1' και '2', για την οποία ισχύουν:

$$P(X_n = 1/X_{n-1} = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X_n = 2/X_{n-1} = 2) = \frac{1}{2}$$

(α) Να σχεδιασθεί το γράφημα της αλυσίδας και να δώσετε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1)$

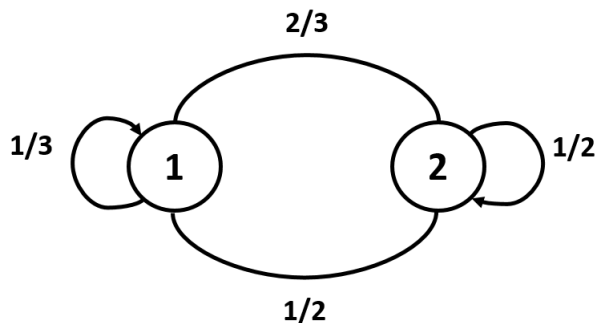
(γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2)$

(δ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(X_n = 2/X_{n-2} = 2)$

(ε) Να υπολογισθεί η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

Λύση

(α) Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 1: Γράφημα Αλυσίδας Άσκησης 1

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης γίνεται:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$P(X_n = 2/X_{n-1} = 1) = 2/3$$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2) = P(X_n = 2/X_{n-1} = 1) = 2/3$$

(δ)

$$\begin{aligned}
P(X_n = 2/X_{n-2} = 2) &= P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2) \cdot P(X_{n-1} = 1/X_{n-2} = 2) + \\
&\quad P(X_n = 2/X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 2) \cdot P(X_{n-1} = 2/X_{n-2} = 2) = \\
&\quad P(X_n = 2/X_{n-1} = 1) \cdot P(X_{n-1} = 1/X_{n-2} = 2) + \\
&\quad P(X_n = 2/X_{n-1} = 2) \cdot P(X_{n-1} = 2/X_{n-2} = 2) = \\
&\quad P_{12} \cdot P_{21} + P_{22} \cdot P_{22} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

(ε) Η στάσιμη κατανομή αλυσίδας γίνεται:

$$\pi = [\pi_1 \quad \pi_2] = \pi \cdot P = [\pi_1 \quad \pi_2] \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{3} \cdot \pi_1 + \frac{1}{2} \cdot \pi_2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \pi_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi_2 \\
\pi_2 &= \frac{2}{3} \cdot \pi_1 + \frac{1}{2} \cdot \pi_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi_2 = \frac{2}{3} \cdot \pi_1
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 + \pi_2 = 1 \\ \frac{2}{3} \cdot \pi_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \pi_1 = \frac{3}{7} \text{ και } \pi_2 = \frac{4}{7}$$

Άσκηση 2.Έστω X_n , $n \geq 0$ δυαδική στοχαστική διαδικασία που παίρνει τιμές 0 ή 1. Δίνονται:

$$P_{X_0}(1) = 1$$

$$P_{X_{n+1}/X_n}(1/1) = 3/4, n \geq 0$$

$$P_{X_{n+1}/X_n}(0/0) = 2/3, n \geq 0$$

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το πρώτο μηδέν θα εμφανισθεί σε χρόνο k , $k = 1, 2, 3, \dots$ **(β)** Να δώσετε τις καταστάσεις της αλυσίδας Markov που περιγράφει το πείραμα, το γράφημα της αλυσίδας και καθώς και τις πιθανότητες μεταβάσης και την οριακή κατανομή της πιθανότητας:

$$P(X_{5000} = 1)$$

(γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα:

$$P(X_{5000} = 1 \text{ και } X_{5002} = 1)$$

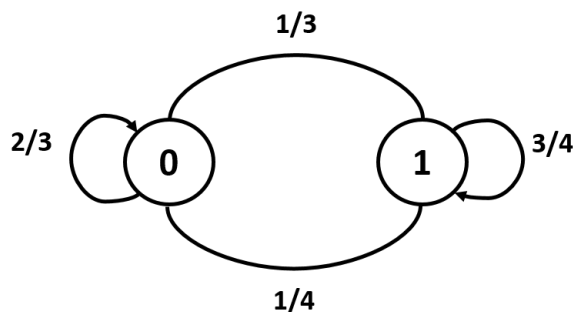
(δ) Δεδομένου του γεγονότος: $X_{5001} = X_{5002} = X_{5003} = \dots = X_{5001+m}$, $m \geq 0$. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η κοινή τιμή είναι 1; Υπολογίστε το όριο της πιθανότητας καθώς το $m \rightarrow \infty$

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι η X_n αποτελεί Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η διαδικασία ξεκινάει πάντα στην κατάσταση 1, οπότε η πιθανότητα: "το πρώτο μηδέν προκύπτει σε χρόνο 1" θα είναι $1/4$. Επίσης, η πιθανότητα ότι "το πρώτο μηδέν προκύπτει σε χρόνο 2" θα είναι: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$. Γενικά, σε χρόνο k θα έχουμε:

$$\frac{3^{k-1}}{4} \cdot \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(β) Το γράφημα της αλυσίδας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2: Γράφημα Αλυσίδας Άσκησης 2

Από τη στάσιμη κατανομή αλυσίδας έχουμε:

$$\pi = [\pi_0 \quad \pi_1] = \pi \cdot P = [\pi_0 \quad \pi_1] \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi_0 + \frac{3}{4} \cdot \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_0 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \pi_1 = \frac{4}{7} \text{ και } \pi_2 = \frac{3}{7}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι μέχρι την 5000η επανάληψη η διαδικασία είναι steady-state. Επομένως, απλά μας ενδιαφέρει η steady-state πιθανότητα του να είμαστε στην κατάσταση 1.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(X_{5000} = 1) \approx \frac{4}{7}$$

(γ) Για τη ζητούμενη πιθανότητα έχουμε:

$$P(X_{5000} = 1 \text{ και } X_{5002} = 1) = P(X_{5002} = 1/X_{5000} = 1) \cdot P(X_{5000} = 1) = \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{31}{84} = 0.369$$

(δ) Θεωρούμε το ενδεχόμενο A: "Η κοινή τιμή είναι 1". Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A/X_{5001} = \dots = X_{5001+m}) &= \\ \frac{P(X_{5001} = \dots = X_{5001+m}/A) \cdot P(A)}{P(X_{5001} = \dots = X_{5001+m}/A) \cdot P(A) + P(X_{5001} = \dots = X_{5001+m}/A^C) \cdot P(A^C)} &= \\ \frac{P(X_{5001} = \dots = X_{5001+m}/X_{5001}=1) \cdot P(X_{5001}=1)}{\sum_{i=0}^1 P(X_{5001} = \dots = X_{5001+m}/X_{5001}=i) \cdot P(X_{5001}=i)} &= \\ \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot \frac{4}{7}}{\left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \frac{3}{7}} &= \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^m} \end{aligned}$$