

9-4-2016

ΘΕΜΑ 4ο

(α) Το χρονικό διάστημα έως την άφιξη του 1000-στου μετανάστη ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 1000 με παράμετρο $\lambda = 150$ [μετανάστες/μέρα]. Επομένως:

$$E[T_{1000}] = \frac{1000}{150} \text{ μέρες} = 6.67 \text{ μέρες.}$$

(β) Το πλήθος των μετανάστων που φτάνουν μεταξύ 7:00-15:00, δηλαδή σε ένα διάστημα 8 ωρών ή $1/3$ ημερών ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $150/3$: $N_{1/3} \sim \text{Poisson}(150/3)$.

Επομένως:

$$E[N_{1/3}] = \frac{150}{3} = 50 \text{ μετανάστες.}$$

(γ) 3 ώρες είναι $1/8$ ημέρες. $N_{1/8} \sim \text{Poisson}(150/8)$.

Συνεπώς:

$$P(N_{1/8} = 15) = \frac{(150/8)^{15}}{15!} e^{-150/8} = 0.0685$$

(δ) Το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 150 [μέρες⁻¹]:

$$T \sim \exp(150): f_T(t) = 150 e^{-150t}; t \geq 0$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-150t}$$

$$P(T > \frac{2}{24}) = 1 - F_T(2/24) = e^{-150 \cdot \frac{2}{24}} = 3.7 \times 10^{-6}$$

(ε) Έστω N_1 : πλήθος μετανάστων που φτάνουν τις πρώτες 10 μέρες
 N_2 : -11- μεταξύ 12-ης & 20-ης μέρας

Προφανώς $N_1 \sim \text{Poisson}(150 \cdot 10)$

$$N_2 \sim \text{Poisson}(150 \cdot 8)$$

Επίσης, N_1 και N_2 : ανεξαρτητές τ.τ. καθώς ορίζονται (2)
 σε ένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα και ο.δ. Poisson.

Ζητάμε την πιθανότητα:

$$P(N_1=0 \text{ και } N_2=0) = P(N_1=0) \cdot P(N_2=0)$$

$$= \frac{(1500)^0 e^{-1500}}{0!} \cdot \frac{(1200)^0 e^{-1200}}{0!} = e^{-2700}$$

ΘΕΜΑ 3^ο Έστω $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ο } i\text{-στός συνδρομητής χρησιμοποιεί} \\ & \text{το κινητό του} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p=0.03)$; $i=1, \dots, 10000$.

Το πλήθος Y των συνδρομητών που χρησιμοποιούν το κινητό τους είναι: $Y = X_1 + \dots + X_{10.000} \sim \Delta(n=10.000, p=0.03)$

Έστω N το πλήθος των γραμμών που διαθέτει ο πάροχος.

Θέλουμε να ισχύει:

$$P(Y > N) \leq 0.01 \quad \text{ή} \quad P(Y \leq N) \geq 0.99$$

Δηλαδή $\sum_{k=0}^N \binom{10.000}{k} 0.03^k 0.97^{10.000-k} \geq 0.99 \quad (1)$

Αντί να λύσουμε την (1) ως προς N , χρησιμοποιούμε το ΚΟΘ:
 Η Y ως άθροισμα 10.000 ανεξαρτητών και όμοιων κατανομών
 ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή με $\mu = np = 300$ και
 $\sigma^2 = np(1-p) = 291$. Επομένως:

$$P(Y \leq N) \geq 0.99 \Rightarrow P\left(\frac{Y-300}{\sqrt{291}} \leq \frac{N-300}{\sqrt{291}}\right) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{N-300}{\sqrt{291}}\right) \geq 0.99 = \Phi(2.33) \Rightarrow \frac{N-300}{\sqrt{291}} \geq 2.33$$

$$\Rightarrow \boxed{N \geq 340}$$

ΘΕΜΑ 2ο

(α) Από την εκφώνηση, έχουμε ότι οι χρόνοι άφιξης είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τ.μ. με μέσες τιμές $\mu_s = 1/\lambda_s$ και $\mu_o = 1/\lambda_o$, αντίστοιχα. Συνεπώς, ορίζονται δύο ανεξάρτητες ε.δ. Poisson με ρυθμούς λ_s και λ_o , αντίστοιχα.

Αν θεωρήσουμε τη συνολική ε.δ. των αφίξεων λεωφορείων στην Κατεχάνη, αυτή είναι μια νέα Poisson ε.δ. με ρυθμό $\lambda_s + \lambda_o$. Δεδομένης μιας άφιξης της συνολικής ε.δ. η πιθανότητα ότι η άφιξη προέρχεται από τη ε.δ. S (Σύνταγμα) είναι $\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_o}$.

(β) Για τη συνολική ε.δ. οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_s + \lambda_o$. Η εκθετική κατανομή δεν έχει μνήμη και επομένως δεδομένης του γεγονότος $\{X_s > t\}$, η X_s είναι επίσης εκθετική με παράμετρο $\lambda_s + \lambda_o$:

$$f_{X_s/\{X_s > t\}}(x/X_s > t) = (\lambda_s + \lambda_o) e^{-(\lambda_s + \lambda_o)(x-t)}, \quad x \geq t.$$

(γ) Ένα λεωφορείο από το Σύνταγμα ή των Ομόνοια κάνει λ_s/ν_s ή λ_o/ν_o μονάδες χρόνου να φτάσει στην Κατεχάνη. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(\text{λεωφορείο κατ' οδόν}) &= 1 - P(\text{κανένα λεωφορείο κατ' οδόν}) \\ &= 1 - P(\text{κανένα λεωφορείο από Σύνταγμα και κανένα λεωφ. από Ομόνοια}) \\ &= 1 - P(\text{κανένα λ. από Σύνταγμα}) \cdot P(\text{κανένα από Ομόνοια}) \\ &\quad \text{Γιατί οι ε.δ. Poisson.} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{(\lambda_s \frac{l_s}{v_s})^0 e^{-\lambda_s \frac{l_s}{v_s}}}{0!} \cdot \frac{(\lambda_0 \frac{l_0}{v_0}) e^{-\lambda_0 \frac{l_0}{v_0}}}{0!} \quad (7)$$

$$= 1 - e^{-\left(\lambda_s \frac{l_s}{v_s} + \lambda_0 \frac{l_0}{v_0}\right)}$$

(8) Οι χρόνοι X_i των κλήσεων μεταξύ του i-ετού και (i+1)-ετού λωφορείου είναι ανεξάρτητες ενδεχόμενες τ.μ. με παρ. $\lambda_s + \lambda_0$.
Επομένως, η τ.μ. Y , ο χρόνος μεταξύ των κλήσεων του 1ου και 4ου λωφορείου είναι για Erlang τ.μ. τάξης = 3.
Συνεπώς, για την $Y = X_1 + X_2 + X_3$,

$$f_Y(y) = \frac{(\lambda_s + \lambda_0)^3 y^2 e^{-(\lambda_s + \lambda_0) y}}{2!}, \quad y \geq 0.$$

(9) θεωρούμε την "split" γ.δ. Poisson όπου μία άφιξη συμβαίνει όταν έρχεται ένα λωφορείο και όταν ο κύριος φέρνει κερτάκι. Καθώς οι αφίξεις των λωφορείων και οι ρίψεις των κέρτακων είναι ανεξάρτητα γεγονότα, η νέα "split" γ.δ. Poisson έχει παράμετρο $\lambda = \rho(\lambda_s + \lambda_0)$
 $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(\lambda_s + \lambda_0)$ (δίκαιο κέρτα). Για αυτή τη γ.δ.

οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων δλ. ακολουθούν ενδεχόμενη κατανομή με παρ. λ . Συνεπώς η σ.η.π. της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο διαδοχικών κερτακών είναι:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_s + \lambda_0) e^{-\frac{1}{2}(\lambda_s + \lambda_0)t} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς.} \end{cases}$$