

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/02/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 08/03/2021

Θέματα: Μετασχηματισμοί, Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις

Άσκηση 1.

- (i) Έστω τ.μ. X που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή ($X \sim N(0, 1)$). Να υπολογιστούν οι $E[X^3]$, $E[X^4]$.
- (ii) Έστω ότι X είναι μία μη-αρνητική τ.μ., που λαμβάνει ακέραιες τιμές. Για την X είναι γνωστό ότι μπορεί να έχει ως μετασχηματισμό μία εκ των δύο ακόλουθων εκφράσεων:
- $M_X(s) = e^{2(e^s - 1) - 1}$
 - $M_X(s) = e^{2(e^s - 1)}$
- (α') Να εξηγήσετε γιατί μία εκ των δύο παραπάνω εκφράσεων δεν μπορεί να είναι ο μετασχηματισμός της τ.μ. X .
- (β') Χρησιμοποιώντας την έγκυρη έκφραση μετασχηματισμού της τ.μ. X (εκ των δύο παραπάνω εκφράσεων), να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X = 0)$.

Υπόδειξη: Για μία μη-αρνητική τ.μ. X , που λαμβάνει ακέραιες τιμές δείξτε ότι ισχύει η σχέση: $\lim_{s \rightarrow -\infty} M_X(s) = P(X = 0)$

Άσκηση 2. Έστω συνεχής τ.μ. X , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = \frac{9 - 7s}{3s^2 - 12s + 9}$$

- (i) Να υπολογίσετε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X .
- (ii) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ. X , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X .
- (iii) Να υπολογίσετε τη διασπορά της τ.μ. X , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X .
- (iv) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \geq 1)$.
- (v) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2)$.

Άσκηση 3. Έστω συνεχής τ.μ. X , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = e^{s^2+s}$$

Θεωρούμε την τ.μ. Z , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$Z = 2X - 2$$

Να υπολογιστούν:

- (i) Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Z , $M_Z(s)$.
- (ii) Η μέση τιμή της τ.μ. Z , $E[Z]$.
- (iii) Η διασπορά της τ.μ. Z , $var(Z)$.

Άσκηση 4. Έστω τ.μ. X που λαμβάνει μη-αρνητικές τιμές, και σχετίζεται με το μετασχηματισμό που δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_X(s) = c \cdot \frac{3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s}, c \in \mathbb{R}$$

Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά c .
- (ii) Η μέση τιμή της τ.μ. X , $E[X]$.
- (iii) Οι τιμές της συνάρτησης πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X $p_X(0)$ και $p_X(1)$. **Υπόδειξη:** Για $|x| < 1$ ισχύει το ανάπτυγμα *Taylor* της γεωμετρικής σειράς: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Άσκηση 5. Το πλήθος των φοιτητών που θα εξεταστούν στην πρόοδο του ΗΥ-317 (Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες) μοντελοποιείται ως μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ . Ο χρόνος (σε λεπτά) που αφιερώνει ο κάθε φοιτητής για τη λύση του διαγωνίσματός του ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 60 και διασπορά 25. Έστω Y ο συνολικός χρόνος που αφιερώθηκε από όλους τους φοιτητές για τη λύση των διαγωνισμάτων της προόδου του ΗΥ-317.

- (i) Να βρείτε το μετασχηματισμό της τ.μ. Y , $M_Y(s)$.
- (ii) Να υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Y .
- (iii) Να υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. Y .