

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (i) Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για μία τ.μ. X που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή ($X \sim N(0, 1)$) ισχύει ότι:

$$M_X(s) = e^{\frac{s^2}{2}}$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους μέχρι 4-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{dM_X(s)}{ds} &= \frac{d\left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)}{ds} = \left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s) \\ \bullet \frac{d^2M_X(s)}{ds^2} &= \frac{d\left(e^{\frac{s^2}{2}} \cdot s\right)}{ds} = \left(e^{\frac{s^2}{2}} \cdot s\right) \cdot s + e^{\frac{s^2}{2}} = \left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^2 + 1) \\ \bullet \frac{d^3M_X(s)}{ds^3} &= \frac{d\left(\left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^2 + 1)\right)}{ds} = \left(e^{\frac{s^2}{2}} \cdot s\right) \cdot (s^2 + 1) + e^{\frac{s^2}{2}} \cdot 2s = \left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^2 + 1) = \left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^3 + 3s) \\ \bullet \frac{d^4M_X(s)}{ds^4} &= \frac{d\left(\left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^3 + 3s)\right)}{ds} = \left(e^{\frac{s^2}{2}} \cdot s\right) \cdot (s^3 + 3s) + e^{\frac{s^2}{2}} \cdot (3s^2 + 3) = \left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^2 + 1) = \left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^4 + 6s^2 + 3) \end{aligned}$$

Άρα, για τις ζητούμενες ροπές, έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet E[X] &= \left.\frac{dM_X(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s)\right|_{s=0} = 1 \cdot 0 = 0 \\ \bullet E[X^2] &= \left.\frac{d^2M_X(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \left.\left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^2 + 1)\right|_{s=0} = 1 \cdot 1 = 1 \\ \bullet E[X^3] &= \left.\frac{d^3M_X(s)}{ds^3}\right|_{s=0} = \left.\left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^3 + 3s)\right|_{s=0} = 1 \cdot 0 = 0 \\ \bullet E[X^4] &= \left.\frac{d^4M_X(s)}{ds^4}\right|_{s=0} = \left.\left(e^{\frac{s^2}{2}}\right)(s^4 + 6s^2 + 3)\right|_{s=0} = 1 \cdot 3 = 3 \end{aligned}$$

- (ii) (α) Προκειμένου μία έκφραση $M_X(s)$ να αποτελεί έγκυρο μετασχηματισμό μίας τ.μ. X , θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$M_X(0) = 1$$

Για τους δοσμένους μετασχηματισμούς, έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet M(0) &= M_X(s)\Big|_{s=0} = e^{2(e^{e^s-1}-1)}\Big|_{s=0} = e^{2(e^{e^0-1}-1)} = e^{2(e^{1-1}-1)} = e^{2(e^0-1)} = e^{2(1-1)} = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1 \\ \bullet M(0) &= M_X(s)\Big|_{s=0} = e^{2(e^{e^s}-1)}\Big|_{s=0} = e^{2(e^{e^0}-1)} = e^{2(e^1-1)} = e^{2e-2} \approx 31.0800 \neq 1 \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, μόνο ο 1-ος μετασχηματισμός μπορεί να είναι ο μετασχηματισμός της τ.μ. X .

(β) Με βάση την υπόδειξη που δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$P(X=0) = \lim_{s \rightarrow -\infty} M_X(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} e^{2(e^s - 1)} = \lim_{s \rightarrow -\infty} e^{2(e^{0-1} - 1)} = \lim_{s \rightarrow -\infty} e^{2(e^{-1} - 1)} \approx 0.2825$$

Άσκηση 2.

(i) Αναλύουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση σε απλά κλάσματα, και έχουμε:

$$M_X(s) = \frac{9-7s}{3s^2-12s+9} = \frac{9-7s}{3(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3}$$

Για τον υπολογισμό των A, B , έχουμε:

$$\begin{cases} A = M_X(s) \cdot (s-1) \Big|_{s=1} = \frac{9-7s}{3(s-3)} \Big|_{s=1} = \frac{2}{3(-2)} = -\frac{1}{3} \\ B = M_X(s) \cdot (s-3) \Big|_{s=3} = \frac{9-7s}{3(s-1)} \Big|_{s=3} = \frac{-12}{3(2)} = -2 \end{cases}$$

Οπότε, η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \frac{9-7s}{3(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1} - 2 \cdot \frac{1}{s-3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-s} + 2 \cdot \frac{1}{3-s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3-s} \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σπι) (pdf) της τ.μ. X που προκύπτει από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση θα είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}3e^{-3x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(ii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 1-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\frac{dM_X(s)}{ds} = \frac{d\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3-s}\right)}{ds} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s-3)^2}$$

Άρα, για τη μέση τιμή της τ.μ. X έχουμε:

$$E[X] = \frac{dM_X(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s-3)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

(iii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 2-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\frac{d^2M_X(s)}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s-3)^2}\right)}{ds} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{(s-1)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-6}{(s-3)^3}$$

Άρα, για τη ροπή 2-ης τάξης της τ.μ. X έχουμε:

$$E[X^2] = \frac{d^2M_X(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{(s-1)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-6}{(s-3)^3} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{27} = \frac{2}{3} + \frac{4}{27} = \frac{22}{27}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς της τ.μ. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Άρα, η διασπορά της τ.μ. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{22}{27} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{22}{27} - \frac{25}{81} = \frac{66-25}{81} = \frac{41}{81}$$

- (iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} 3e^{-3x} \right) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{3} 3e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int_1^{+\infty} -e^{-x} dx - \frac{2}{3} \int_1^{+\infty} -3e^{-3x} dx \\ &= -\frac{1}{3} \left[e^{-x} \right]_1^{+\infty} - \frac{2}{3} \left[e^{-3x} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{3} (0 - e^{-1}) - \frac{2}{3} (0 - e^{-3}) = \frac{e^{-1} + 2e^{-3}}{3} \end{aligned}$$

- (v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2\right) &= \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2, 0 \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} \\ &= \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x) dx}{\int_0^2 f_X(x) dx} \\ &= \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} 3e^{-3x} \right) dx}{\int_0^2 \left(\frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} 3e^{-3x} \right) dx} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3} e^{-x} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{2}{3} 3e^{-3x} dx}{\int_0^2 \frac{1}{3} e^{-x} dx + \int_0^2 \frac{2}{3} 3e^{-3x} dx} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} \int_{\frac{3}{2}}^2 -e^{-x} dx - \frac{2}{3} \int_{\frac{3}{2}}^2 -3e^{-3x} dx}{-\frac{1}{3} \int_0^2 -e^{-x} dx - \frac{2}{3} \int_0^2 -3e^{-3x} dx} = \frac{-\frac{1}{3} \left[e^{-x} \right]_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{2}{3} \left[e^{-3x} \right]_{\frac{3}{2}}^2}{-\frac{1}{3} \left[e^{-x} \right]_0^2 - \frac{2}{3} \left[e^{-3x} \right]_0^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} (e^{-2} - e^{-\frac{3}{2}}) - \frac{2}{3} (e^{-6} - e^{-\frac{9}{2}})}{-\frac{1}{3} (e^{-2} - 1) - \frac{2}{3} (e^{-6} - 1)} = \frac{-e^{-2} + e^{-\frac{3}{2}} - 2e^{-6} + 2e^{-\frac{9}{2}}}{-e^{-2} + 1 - 2e^{-6} + 2} \\ &= \frac{e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{9}{2}} - e^{-2} - 2e^{-6}}{3 - e^{-2} - 2e^{-6}} \approx \frac{0.1051}{2.8597} = 0.0367 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

- (i) Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Z γίνεται:

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= E[e^{sZ}] = E[e^{s(2X-2)}] = E[e^{2s \cdot X} \cdot e^{-2s}] \\ &= e^{-2s} \cdot E[e^{2s \cdot X}] = e^{-2s} \cdot M_X(2s) \\ &= e^{-2s} \cdot e^{(2s)^2 + (2s)} = e^{-2s} \cdot e^{4s^2 + 2s} = e^{4s^2} \end{aligned}$$

- (ii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 1-ης τάξης της $M_Z(s)$, έχουμε:

$$\frac{dM_Z(s)}{ds} = \frac{d(e^{4s^2})}{ds} = (e^{4s^2})(8s)$$

Άρα, για τη μέση τιμή της τ.μ. Z έχουμε:

$$E[Z] = \left. \frac{dM_Z(s)}{ds} \right|_{s=0} = (e^{4s^2})(8s) \Big|_{s=0} = 1 \cdot 0 = 0$$

(iii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 2-ης τάξης της $M_Z(s)$, έχουμε:

$$\frac{d^2 M_Z(s)}{ds^2} = \frac{d\left((e^{4s^2})(8s)\right)}{ds} = [(e^{4s^2})(8s)] \cdot (8s) + [(e^{4s^2})] \cdot 8 = (e^{4s^2})(16s^2 + 8)$$

Άρα, για τη ροπή 2-ης τάξης της τ.μ. Z έχουμε:

$$E[Z^2] = \frac{d^2 M_Z(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = (e^{4s^2})(16s^2 + 8) \Big|_{s=0} = 1 \cdot 8 = 8$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς της τ.μ. Z , $VAR[Z]$, θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2$$

Άρα, η διασπορά της τ.μ. Z , $VAR[Z]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2 = 8 - 0^2 = 8$$

Άσκηση 4.

(i) Για τον υπολογισμό της σταθεράς c , χρησιμοποιούμε τη γνωστή από τη θεωρία σχέση:

$$M_X(0) = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s} \Big|_{s=0} = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{3 + 4 + 2}{3 - 1} = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{9}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{9}$$

(ii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 1-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dM_X(s)}{ds} &= \frac{d\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s}\right)}{ds} = \frac{2}{9} \left(\frac{(8e^{2s} + 6e^{3s})(3 - e^s) - (3 + 4e^{2s} + 2e^{3s})(-e^s)}{(3 - e^s)^2} \right) \\ &= \frac{2}{9} \frac{(24e^{2s} - 8e^{3s} + 18e^{3s} - 6e^{4s}) - (-3e^s - 4e^{3s} - 2e^{4s})}{(3 - e^s)^2} = \frac{2}{9} \frac{-4e^{4s} + 14e^{3s} + 24e^{2s} + 3e^s}{(3 - e^s)^2} \end{aligned}$$

Άρα, για τη μέση τιμή της τ.μ. X έχουμε:

$$E[X] = \frac{dM_X(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{2}{9} \frac{-4e^{4s} + 14e^{3s} + 24e^{2s} + 3e^s}{(3 - e^s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{9} \frac{-4 + 14 + 24 + 3}{2^2} = \frac{2}{9} \frac{37}{4} = \frac{37}{18}$$

(iii) Με βάση την υπόδειξη της άσκησης, έχουμε:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, |x| < 1$$

Άρα, για s "αρκετά μικρό" έτσι ώστε $e^s < 3$, έχουμε:

$$\frac{1}{3 - e^s} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{e^s}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{e^s}{3} + \frac{e^{2s}}{9} + \dots \right)$$

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, η $M_X(s)$ γίνεται:

$$M_X(s) = \frac{2}{9} \frac{3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s} = \frac{2}{9} \frac{1}{3} (3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}) \left(1 + \frac{e^s}{3} + \frac{e^{2s}}{9} + \dots \right)$$

Άρα, παρατηρώντας την μορφή της $M_X(s)$, και συγκρίνοντάς τη με τον τύπο ορισμού της ($M_X(s) = \sum_x e^{sx} p_X(x)$), έχουμε τελικά: $p_X(0) = \frac{2}{9}$ και $p_X(1) = \frac{2}{27}$.

Άσκηση 5.

- (i) Έστω N ο αριθμός των φοιτητών που θα εξεταστούν στην πρόοδο του HY-317. Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

Έστω X_i ο χρόνος που αφιερώνει ο φοιτητής i για να λύσει το διαγώνισμά του. Έστω $M_X(s)$ ο κοινός μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στις τ.μ. X_i . Εφόσον κάθε X_i είναι κανονικά κατανεμημένη μέση τιμή 60 και διασπορά 25, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_X(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s}$$

Ο μετασχηματισμός $M_Y(s)$ προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην έκφραση του $M_N(s)$ όπου e^s με $M_X(s)$. Έτσι, έχουμε τελικά:

$$M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(e^s - 1)} \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} = e^{\lambda(e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s} - 1)}$$

- (ii) Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ. Y , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$E[Y] = E[X]E[N]$$

Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $E[N] = \lambda$.

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$E[Y] = \mu \cdot \lambda = 60\lambda$$

- (iii) Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ. Y , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$VAR[Y] = VAR[X]E[N] + (E[X])^2 VAR[N]$$

Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $VAR[N] = \lambda$.

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$VAR[Y] = 25\lambda + (60)^2\lambda = \lambda(3600 + 25) = 3625\lambda$$