

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/03/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 05/04/2021

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Στοχαστικές Διαδικασίες Bernoulli, Στοχαστικές Διαδικασίες Poisson

Άσκηση 1.

Βρίσκεστε για εξερεύνηση στο δάσος της Νότιας Αμερικής, αλλά ξεχάσατε το εντομοαπωθητικό σας. Ως αποτέλεσμα, κάθε δευτερόλεπτο σας τσιμπάει ένα κουνούπι με πιθανότητα $p=0.2$.

- α') Ποια η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- β') Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- γ') Τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα δεν σας έχει τσιμπήσει κανένα κουνούπι. Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά (μετρώντας από $t=10$);

Άσκηση 2.

Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson με $\lambda = 2$ και $X_1, X_2, \dots$ οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων.

- α') Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να συμβεί μετά το $t=0.5$, δηλαδή $P(X_1 > 0.5)$.
- β') Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν αφίξεις πριν από την $t=1$, να βρείτε την $P(X_1 > 3)$.
- γ') Δεδομένου ότι η τρίτη άφιξη πραγματοποιήθηκε τη στιγμή $t=2$, να βρείτε την πιθανότητα η τέταρτη άφιξη να συμβεί μετά το $t=4$.
- δ') Αρχίζετε να παρακολουθείτε τη διαδικασία τη στιγμή $t=10$. Έστω ότι T είναι η στιγμή της πρώτης άφιξης που βλέπετε. Με άλλα λόγια, το T είναι η πρώτη άφιξη μετά το $t=10$. Να βρείτε τις τιμές των $E[T]$ και $\text{Var}(T)$.

- ε') Αρχίζετε να παρακολουθείτε τη διαδικασία τη στιγμή $t=10$. Έστω ότι T είναι η στιγμή της πρώτης άφιξης που βλέπετε. Έστω A το γεγονός η τελευταία άφιξη να έλαβε χώρα την στιγμή $t=9$. Να βρείτε τις τιμές των $E[T | A]$ και $\text{Var}(T | A)$.

Άσκηση 3.

Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση.

Ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας $P(X = x) = e^{-4} \frac{4^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

- α') Ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται στη δεύτερη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;
- β') Ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;

Άσκηση 4.

Ο Μανώλης αποτυγχάνει στα διαγωνίσματα με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, ανεξάρτητα από άλλα διαγωνίσματα.

- α') Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Μανώλης αποτυγχάνει σε ακριβώς τρία από τα επόμενα πέντε διαγωνίσματα;
- β') Ποιος είναι ο μέσος αριθμός διαγωνισμάτων που ο Μανώλης θα έχει περάσει πριν αποτύχει τέσσερις φορές;
- γ') Ποια είναι η πιθανότητα ότι η δεύτερη και τρίτη φορά που ο Μανώλης αποτυγχάνει σε ένα διαγώνισμα είναι όταν δίνει το έκτο και έβδομο διαγώνισμα, αντιστοίχως;
- δ') Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Μανώλης αποτυγχάνει σε τρία διαγωνίσματα στη σειρά πριν περάσει δύο διαγωνίσματα στη σειρά;

Άσκηση 5.

Μία πιτσαρία σερβίρει n διαφορετικά είδη πίτσας και την επισκέπτεται αριθμός K πελατών σε μία περίοδο χρόνου, όπου το K είναι μία τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή λ . Κάθε πελάτης παραγγέλλει μία πίτσα και όλα τα είδη πίτσας έχουν την ίδια πιθανότητα, ανεξάρτητα από τον αριθμό των πελατών και των ειδών πίτσας που αυτοί παραγγέλλουν. Να βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών ειδών πίτσας που σερβίρονται.

Άσκηση 6.

Δύο πελάτες A και B υποβάλλουν εργασίες σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς α και β εργασίες ανά ώρα, αντίστοιχα.

- α') Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς δέκα από τις επόμενες δεκαπέντε εργασίες να προέρχονται από τον πελάτη B .
- β') Υπολογίστε την πιθανότητα υποβολής πέντε εργασιών κατά τη διάρκεια t ωρών.
- γ') Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. M του πλήθους των εργασιών που υποβάλλονται από τον πελάτη A έως και το χρόνο υποβολής της 4ης εργασίας από τον πελάτη B . Το πλήθος των προγραμμάτων σε κάθε υποβληθείσα εργασία μπορεί να είναι 2 ή 3 ή 4 με ίση πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Το πλήθος των προγραμμάτων σε κάθε εργασία είναι ανεξάρτητο από κάθε άλλη εργασία καθώς και από τον πελάτη από τον οποίο προέρχεται η εργασία.

- δ') Υπολογίστε την πιθανότητα ότι οι πρώτες 3 εργασίες περιέχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό προγραμμάτων.
- ε') Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X , του χρονικού διαστήματος μέχρι τη λήψη 7 εργασιών με 4 προγράμματα η καθεμία από τον πελάτη Α.

Άσκηση 7.

Υποθέστε ότι έχετε n κόλλες χαρτιού σε ένα συρτάρι. Τραβάτε μία κόλλα, την ζωγραφίζετε και στη συνέχεια αντί να την τοποθετήσετε στην άκρη, την βάζετε ξανά πίσω στο συρτάρι. Εάν κάθε κόλλα είναι το ίδιο πιθανόν να τραβηχτεί κάθε φορά, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός από κόλλες που θα έχετε τραβήξει και ζωγραφίσει, πριν ζωγραφίσετε και τις n κόλλες;

Άσκηση 8.

Υποθέστε ότι για 5 λεπτά παρατηρείτε αστέρια που πέφτουν και γνωρίζετε ότι κατά μέσο όρο, πέφτουν 3 αστέρια το λεπτό. Συνεπώς, η συχνότητα πτώσης αστεριών για την περίοδο 5 λεπτών είναι $\lambda=15$, δηλαδή, περιμένετε να δείτε κατά μέσο όρο 15 αστέρια να πέφτουν σε διάστημα 5 λεπτών.

- α') Χρησιμοποιώντας το MATLAB, προσομοιώστε το παραπάνω γεγονός ως μία διαδικασία Poisson, χωρίζοντας το διάστημα των 5 λεπτών σε 300 διαστήματα του ενός δευτερολέπτου. Αποθηκεύστε σε μία μεταβλητή τον αριθμό των αστεριών που πέφτουν και παρουσιάστε ένα γράφημα με την διαδικασία.
- β') Με τον ίδιο τρόπο, προσπαθήστε να αναπαραστήσετε 10.000 πεντάλεπτες περιόδους πτώσης αστεριών. Αποθηκεύστε σε μία μεταβλητή τον πίνακα με το σύνολο των αστεριών για κάθε διάστημα 5 λεπτών και βρείτε την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και την διακύμανση.
- γ') Δημιουργήστε ένα γράφημα στο οποίο παρουσιάζετε τα δεδομένα από το προηγούμενο ερώτημα και την πραγματική κατανομή που δημιουργεί η έτοιμη συνάρτηση `poisspdf()` του MATLAB. Σχολιάστε κατά πόσο τα προσομοιωμένα δεδομένα ταιριάζουν με την πραγματική κατανομή.
- δ') Η διωνυμική κατανομή (n,p) μπορεί να προσεγγιστεί από την διαδικασία Poisson για $\lambda=np$, όταν το n παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Χρησιμοποιείστε την συνάρτηση `poisspdf()` για να δημιουργήσετε μία διαδικασία Poisson με $\lambda=4$ για τις τιμές από 0 έως 12. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείστε την συνάρτηση `binopdf()` για να δημιουργήσετε μία διωνυμική κατανομή. Τέλος, αναπαραστήστε σε ένα γράφημα την διαδικασία Poisson (χρησιμοποιήστε την συνάρτηση `stem()`) και την διωνυμική κατανομή.

Παραθέστε τον κώδικά σας, τα ζητούμενα γραφήματα και μία μικρή αναφορά με τις παρατηρήσεις σας για τα αποτελέσματα.