

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- α') Το σενάριο όπου κουνούπια ανεξάρτητα προσγειώνονται πάνω σας, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια στοχαστική διαδικασία $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με κάθε δοκιμή X_i να αποτελεί το γεγονός όπου ένα κουνούπι προσγειώνεται πάνω σας με πιθανότητα p :

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 1 \\ 0.8, & x = 0 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο χρόνος T μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μια στοχαστική διαδικασία Bernoulli μοντελοποιείται ως μια Γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο p , άρα η ζητούμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το χρόνο μέχρι να προσγειωθεί πάνω σας το πρώτο κουνούπι θα είναι Γεωμετρική με $p = 0.2$:

$$p_T(t) = \begin{cases} (1-p)^{t-1} \cdot p = (1-0.2)^{t-1} \cdot 0.2 = (0.8)^{t-1} \cdot 0.2, & t \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- β') Η μέση τιμή της Γεωμετρικής με παράμετρο p είναι $\frac{1}{p}$, επομένως ο μέσος χρόνος μέχρι να σας τοιμήσει κουνούπι πρώτη φορά θα είναι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.
- γ') Επειδή η διαδικασία Bernoulli δεν έχει μνήμη, δεν έχει σημασία πότε σας τσίμπησε πρώτη φορά ένα κουνούπι και αν αυτό έγινε το 1ο δευτερόλεπτο, το 2ο, το 20ο ή το 200ο. Επομένως, η μέση τιμή του χρόνου μετρώντας από τη στιγμή $t = 10$ θα είναι και πάλι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

Άσκηση 2.

- α') Το X_1 ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = 2$ επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$P(X_1 > 0.5) = e^{-(2 \cdot 0.5)} \approx 0.37$$

- β') $P(X_1 > 3 | X_1 > 1) = P(\text{καμία άφιξη στο } (1, 3] | \text{καμία άφιξη στο } (0, 1]) = P(\text{καμία άφιξη στο } (1, 3])e^{-2 \cdot 2} \approx 0.0183$

- γ') Ο χρόνος μεταξύ της τρίτης και της τέταρτης άφιξης συμβολίζεται με X_4 και ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda=2$. Συνεπώς έχουμε:

$$P(X_4 > 2 | X_1 + X_2 + X_3 = 2) = P(X_4 > 2) = e^{-2 \cdot 2} \approx 0.0183$$

- δ') Την στιγμή $t = 10$ που ξεκινάμε να παρακολουθούμε την διαδικασία, έχουμε μία διαδικασία Poisson. Ο χρόνος της πρώτης άφιξης από την στιγμή $t = 10$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda=2$. Επομένως έχουμε:

$$T = 10 + X$$

με το X να ακολουθεί και αυτό εκθετική κατανομή με $\lambda=2$. Έχουμε:

$$E[T] = 10 + E[X] = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\text{var}(T) = \text{var}(X) = \frac{1}{4}$$

- ε') Οι αφίξεις πριν την στιγμή $t = 10$ είναι ανεξάρτητες από τις αφίξεις μετά την στιγμή $t = 10$. Οπότε, το γεγονός ότι ξέρουμε πως η τελευταία άφιξη προέκυψε την στιγμή $t = 9$ δεν επηρεάζει την κατανομή της πρώτης άφιξης μετά την στιγμή $t = 10$. Θεωρούμε A το γεγονός πως η πρώτη άφιξη συνέβει την στιγμή $t = 9$, μπορούμε να γράψουμε:

$$E[T|A] = E[T] = \frac{21}{2}$$

$$\text{var}(T|A) = \text{var}(T) = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 3.

- α') Για να ταξιδεύσει ο 2ος επιβάτης του καταλόγου αναμονής, θα πρέπει να μην προσέλθουν τουλάχιστον 2 από τους επιβάτες που ήταν προγραμματισμένο να πετάξουν. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.0183 - 0.0733 = 0.9084$$

- β') Για να ταξιδεύσει ο 5ος επιβάτης του καταλόγου αναμονής, θα πρέπει να μην προσέλθουν τουλάχιστον 5 από τους επιβάτες που ήταν προγραμματισμένο να πετάξουν. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{x=0}^4 P(X = x) = 1 - \sum_{x=0}^4 e^{-4} \frac{4^x}{x!}$$

Άσκηση 4.

- α') Τα διαγωνίσματα στα οποία αποτυγχάνει ο Μανώλης ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία Bernoulli με παράμετρο $p = \frac{2}{3}$. Ο αριθμός των $k = 3$ αποτυχιών σε $n = 5$ ανεξάρτητα διαγωνίσματα ορίζεται ως μια Διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους p, n και η ζητούμενη πιθανότητα δίδεται ως:

$$p_K(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 = \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

- β') Ο αναμενόμενος μέσος αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι την τέταρτη αποτυχία είναι η μέση τιμή μιας Pascal τυχαίας μεταβλητής Y_k τάξεως $k = 4$ με παράμετρο $p = \frac{2}{3}$: $E[Y_k] = \frac{k}{p} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$. Αφαιρώντας τον αριθμό των αποτυχιών, έχουμε ότι ο αναμενόμενος αριθμός των διαγωνισμάτων που θα έχει περάσει ο Μανώλης πριν αποτύχει τρεις φορές θα είναι τελικά $6 - 4 = 2$ διαγωνίσματα.

- γ') Το γεγονός που μας ενδιαφέρει είναι η τομή των ακόλουθων τριών ανεξάρτητων γεγονότων:

$$A = \{\text{Ο Μανώλης αποτυγχάνει σε ακριβώς 1 από τα 5 πρώτα διαγωνίσματα}\}$$

$$B = \{\text{Ο Μανώλης αποτυγχάνει στο } 6^{\circ} \text{ διαγώνισμα}\}$$

$$\Gamma = \{\text{Ο Μανώλης αποτυγχάνει στο } 7^{\circ} \text{ διαγώνισμα}\}$$

Έχουμε

$$P(A) = \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^4, \quad P(B) = P(\Gamma) = \frac{2}{3},$$

έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

δ) Έστω Δ το γεγονός ότι ο Μανώλης αποτυγχάνει σε τρία διαγωνίσματα στη σειρά πριν περάσει δύο διαγωνίσματα στη σειρά. Έστω E τα διαγωνίσματα που έχει περάσει και A τα διαγωνίσματα στα οποία έχει αποτύχει αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(\Delta) &= P(AAA \cup EAAA \cup AEAAA \cup EAEAAA \cup AEAEAAA \cup EAEAEAAA \cup \dots) \\ &= P(AAA) + P(EAAA) + P(AEAAA) + P(EAEAAA) + P(AEAEAAA) \\ &\quad + P(EAEAEAAA) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \\ &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Έτσι, $P(\Delta)$ είναι το άθροισμα δύο άπειρων γεωμετρικών σειρών και

$$P(\Delta) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{16}{21}.$$

Άσκηση 5. Έστω X ο αριθμός των διαφορετικών ειδών πίτσας. Θεωρούμε X_i μία τυχαία μεταβλητή, όπου:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{εάν το είδος πίτσας } i \text{ παραγγέλλεται από τουλάχιστον έναν πελάτη} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έχουμε $X = X_1 + \dots + X_n$ και $E[X] = nE[X_1]$

Μπορούμε να σκεφτούμε ότι οι πελάτες φτάνουν με μία διαδικασία Poisson και κάθε πελάτης, ανεξάρτητα, αποφασίζει εάν θα παραγγείλει μία πίτσα τύπου 1 (με πιθανότητα $\frac{1}{n}$ ή όχι. Αυτή είναι μία διαδικασία διάσπασης της Poisson και ο αριθμός παραγγελιών πίτσας τύπου 1 ορίζεται ως Y_1 , και είναι μία τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο $\frac{\lambda}{n}$. Συνεπώς:

$$E[X_1] = P(Y_1 > 0) = 1 - P(Y_1 = 0) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}$$

επομένως:

$$E[X] = nE[X_1] = n(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})$$

Άσκηση 6.

α') Θεωρώντας ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα δ έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\text{εργασία από B}\} \mid \{\text{υποβάλλεται κάποια εργασία}\}) \\ &= \frac{P(\text{υποβάλλεται εργασία από τον B})}{P(\text{υποβάλλεται κάποια εργασία})} \\ &= \frac{\beta\delta}{(\alpha + \beta)\delta} \\ &= \frac{\beta}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$P(\text{ακριβώς 10 από τις επόμενες 15 εργασίες από τον B}) = \binom{15}{10} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^{10} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^5$$

β') Το ερώτημα αφορά τη συνδυασμένη διαδικασία υποβολής εργασιών από τους πελάτες A και B, η οποία έχει ρυθμό $\alpha + \beta$. Με άλλα λόγια, ζητείται η πιθανότητα $P(5, t)$ για ρυθμό $\lambda = \alpha + \beta$, η οποία είναι:

$$\frac{((\alpha + \beta)t)^5 e^{-(\alpha + \beta)t}}{5!}$$

γ') Χρησιμοποιώντας τη συνδυασμένη διαδικασία έχουμε:

$\{M = m\} = \{m \text{ υποβολές από τον A σε σύνολο } m + 3 \text{ υποβολών ΚΑΙ η } (m + 4)\text{-η υποβολή είναι από τον B}\}.$

Από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης της διαδικασίας Poisson προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P(M = m) &= P(m \text{ υποβολές από τον A σε σύνολο } m + 3 \text{ υποβολών}) \times \\ &\times P(\text{η } (m + 4)\text{-η υποβολή είναι από τον B}) \end{aligned}$$

$$p_M(m) = \binom{m+3}{m} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^4 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Για την εύρεση της μέσης τιμής και της διασποράς της M μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας την PMF που υπολογίσαμε προηγουμένως, είτε να παρατηρήσουμε ότι:

$$M = X_1 + X_2 + \dots + X_4$$

όπου X_i είναι τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των υποβολών του A μεταξύ της $(i-1)$ -οστής και i -οστής υποβολής του B. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι X_i είναι i.i.d. τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή μετατοπισμένη κατά 1, με παράμετρο $p = 1 - P(A) = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$.

Άρα,

$$E[M] = 4E[X] = 4\left(\frac{\alpha + \beta}{\beta} - 1\right) = \frac{4\alpha}{\beta}, \quad \text{var}(M) = 16\text{var}(X) = \frac{16\alpha(\alpha + \beta)}{\beta^2}$$

- δ') $P(\text{υποβολή εργασίας με 1 πρόγραμμα}) = P(\text{υποβολή εργασίας με 2 προγράμματα}) = P(\text{υποβολή εργασίας με 3 προγράμματα}) = P(\text{υποβολή εργασίας με 4 προγράμματα}) = \frac{1}{4}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(\text{οι πρώτες 3 εργασίες έχουν ίδιο αριθμό προγραμμάτων}) &= \\ &P(\text{οι πρώτες 3 εργασίες έχουν 1 πρόγραμμα}) + \\ &P(\text{οι πρώτες 3 εργασίες έχουν 2 προγράμματα}) + \\ &P(\text{οι πρώτες 3 εργασίες έχουν 3 προγράμματα}) + \\ &P(\text{οι πρώτες 3 εργασίες έχουν 4 προγράμματα}) = \\ &4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \\ &\frac{1}{64}. \end{aligned}$$

- ε') Μπορούμε να φτάσουμε εύκολα στην απάντηση του ερωτήματος χρησιμοποιώντας διαίρεση της διαδικασίας Poisson. Δημιουργούμε μια νέα διαίρεση της διαδικασίας του πελάτη A, οι αφίξεις της οποίας αντιστοιχούν σε εργασίες του A που περιλαμβάνουν 4 προγράμματα. Η νέα διαδικασία έχει ρυθμό:

$$P(\text{η εργασία έχει 4 προγράμματα}) \times (\text{αρχικός ρυθμός}) = \frac{1}{4}\alpha.$$

οπότε η X είναι Erlang τυχαία μεταβλητή 7ης τάξης με παράμετρο $(\frac{1}{4}\alpha)$ και συνεπώς, η PDF της είναι:

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{4}\alpha\right)^7 x^6 e^{-\frac{1}{4}\alpha x}}{6!}, \quad x \geq 0.$$

Άσκηση 7.

Θεωρούμε M το συνολικό αριθμό χαρτιών που τραβάμε από το συρτάρι μέχρι να ζωγραφίσουμε και τις n κόλλες. Έστω T_i να είναι ο αριθμός των χαρτιών που τραβάμε μέχρι να τραβήξουμε την επόμενη μη ζωγραφισμένη κόλλα, αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες. Τότε $M = T_0 + \dots + T_{n-1}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε την διαδικασία του να τραβάμε την επόμενη κενή κόλλα αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες, ως μία ακολουθία Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p_i = \frac{n-i}{n}$, εφόσον υπάρχουν $n-i$ κενές σελίδες από το σύνολο n σελίδων. Κάθε φύλλο χαρτιού έχει την ίδια ανεξάρτητη πιθανότητα να επιλεγεί από το συρτάρι. Η διαδικασία τραβήγματος φύλλων χαρτιού από το συρτάρι μέχρι να πετύχουμε την επόμενη κενή κόλλα, αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες, ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο.

Η πιθανότητα να χρειαστούμε k προσπάθειες μέχρι να τραβήξουμε την επόμενη κενή κόλλα, αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες είναι:

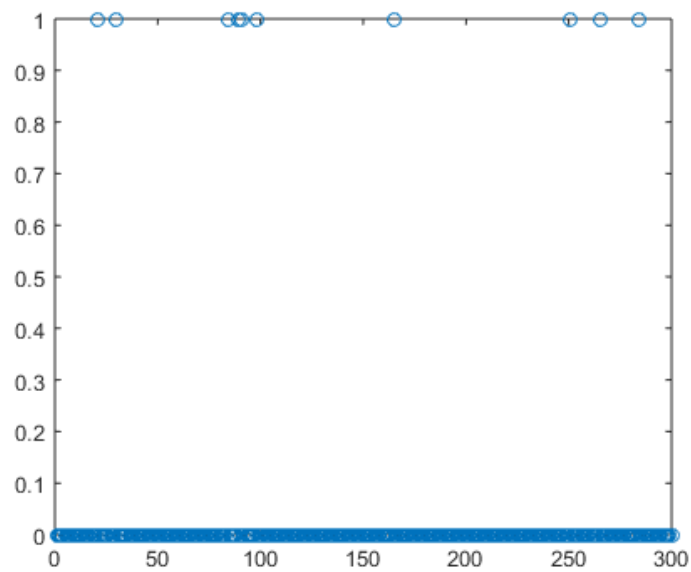
$$P(T_i = k) = (1 - p_i)^{k-1} p_i$$

Η αναμενόμενη τιμή του M είναι:

$$E[M] = E[\sum_{i=0}^{n-1} T_i] = \sum_{i=0}^{n-1} E[T_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

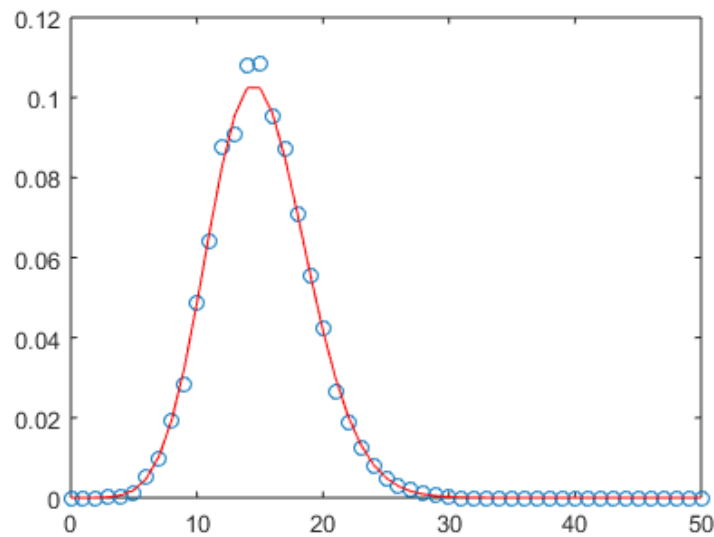
Άσκηση 8.

- α') Στο παρακάτω γράφημα βλέπουμε την διαδικασία Poisson που ακολουθεί η πτώση αστεριών. Η γραμμή στο κάτω μέρος του γραφήματος συμβολίζει τα δευτερόλεπτα όπου δεν πέφτει κάποιο αστέρι.



β') Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $mean()$ για να υπολογίσουμε την μέση τιμή, την συνάρτηση $std()$ για την τυπική απόκλιση και την $std()^2$ για την διακύμανση.

γ') Παρακάτω μπορούμε να δούμε γραφικά την κατανομή που δημιουργήσαμε και τα δεδομένα της κατανομής που δημιουργεί η έτοιμη συνάρτηση $poispdf()$. Παρατηρούμε ότι τα δεδομένα της προσομοιωμένης κατανομής είναι αρκετά κοντά στην κατανομή που μας δίνει η έτοιμη συνάρτηση.



δ') Παρακάτω μπορούμε να δούμε το γράφημα της διαδικασίας Poisson και της διωνυμικής κατανομής, η οποία συμβολίζεται με '+'.

