

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

Έστω ένας παίκτης σε καζίνο. Ξεκινώντας έχοντας ένα συγκεκριμένο ποσό, έχει ίση πιθανότητα να κερδίσει ή να χάσει. Αν κερδίσει, έχει 0.25 πιθανότητα να χάσει παραπάνω απ' όσα έχει κερδίσει μέχρι εκείνη τη στιγμή, 0.25 πιθανότητα να επανέλθει στο αρχικό ποσό που ξεκίνησε και 0.5 πιθανότητα να κερδίσει ξανά, ενώ αν χάσει έχει 0.5 πιθανότητα να εξακολουθεί να έχει λιγότερα από το αρχικό ποσό, 0.25 να επανέλθει στο αρχικό ποσό του και 0.25 να αποκτήσει κέδρος. Κατασκευάστε μια κατάλληλη αλυσίδα Markov για το πρόβλημα αυτό, δώστε τον πίνακα πιθανοτήτων και βρείτε τις πιθανότητες της στατιστικής κατανομής.

Άσκηση 2.

Έστω μια αλυσίδα Markov με δυο καταστάσεις, 0 και 1, για τις οποίες ισχύει ότι

$$P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1) = \frac{2}{5}$$

και

$$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 0) = \frac{2}{3}.$$

α) Δώστε το γράφημα και τον πίνακα πιθανότητας μετάβασης της αλυσίδας.

β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 0)$ και $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0, X_{n-2} = 1)$.

γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 0 \mid X_{n-2} = 1)$.

- δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_3 = 1)$ όταν $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.
- ε) Υπολογίστε τις πιθανότητες της στατιστικής κατανομής της αλυσίδας.

Άσκηση 3.

Μια αλυσίδα Markov με 6 καταστάσεις $\{S_1, \dots, S_6\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

- α) Σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας αυτής και αναγνωρίστε τις έμμονες και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις έμμονων καταστάσεων και βρείτε ποιες από αυτές είναι περιοδικές.
- β) Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Αν ναι, ποιες είναι αυτές;
- γ) Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4; Αν ναι, ποιες είναι αυτές;

Άσκηση 4.

Έστω η αλυσίδα Markov με 3 καταστάσεις, 1,2,3, και πίνακα μετάβασης

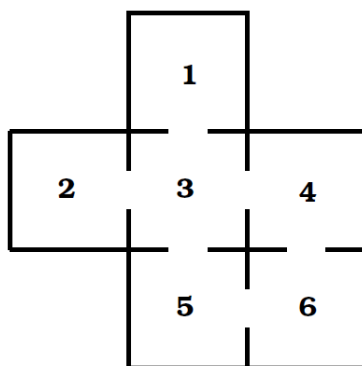
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- α) Δώστε το γράφημα της αλυσίδας αυτής. Αναγνωρίστε τις κλάσεις έμμονων καταστάσεων της αλυσίδας αυτής και χαρακτηρίστε τις ως περιοδικές ή απεριοδικές. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- β) Αν η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 1, βρείτε την πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση 3 μετά από 2 βήματα.
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρισκόμαστε στην κατάσταση 2 μετά από n βήματα;

Άσκηση 5.

Ένα ποντίκι διατρέχει το λαβύρινθο που φαίνεται παρακάτω. Σε κάθε βήμα φεύγει από το δωμάτιο, επιλέγοντας τυχαία μία από τις πόρτες του δωματίου που βρίσκεται.

- α) Δώστε τον πίνακα μετάβασης για αυτή την αλυσίδα Markov.
- β) Αναγνωρίστε τις κλάσεις έμμονων καταστάσεων της αλυσίδας αυτής και χαρακτηρίστε τις ως περιοδικές ή απεριοδικές. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- γ) Βρείτε τη στατιστική κατανομή στο χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.



Άσκηση 6.

Στο ταμείο της καφετέριας του Πανεπιστημίου εργάζεται μόνο μία υπάλληλος. Λόγω έλλειψης χώρου, επιτρέπει να σχηματίσουν ουρά μπροστά της μόνο M φοιτητές. Αν φτάνοντας στην ουρά κάποιος φοιτητής βρει μπροστά του M συμφοιτητές του (μαζί με αυτόν που εξυπηρετείται εκείνη τη στιγμή), φεύγει αμέσως. Κάθε λεπτό συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα γεγονότα:

- ένας νέος φοιτητής φτάνει με πιθανότητα p ,
- ένας φοιτητής φεύγει με πιθανότητα kq , όπου k είναι ο αριθμός των φοιτητών στην καφετέρια,
- κανένας νέος φοιτητής δεν φτάνει ούτε υπάρχων φεύγει με πιθανότητα $1 - p - kq$ αν υπάρχει τουλάχιστον ένας φοιτητής στην καφετέρια, ή με πιθανότητα $1 - p$ αν δεν υπάρχει.

α) Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας γεννήσεως-θανάτου. Ορίστε τις κατάλληλες καταστάσεις και δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

β) Επισκεπτεστε την καφετέρια αφού αυτή είναι ανοιχτή για αρκετό χρόνο. Πόσους πελάτες περιμένετε να βρείτε στην ουρά;

Άσκηση 7.

Η χώρα του Οζ είναι ευλογημένη από πολλά πράγματα, αλλά όχι από τον καλό καιρό. Δεν έχει ποτέ δύο συνεχόμενες μέρες ήλιο στη χώρα αυτή. Μετά από μια ηλιόλουστη μέρα, είναι εξίσου πιθανό να έχει χιόνι ή βροχή την επόμενη μέρα. Εάν έχουν χιόνι ή βροχή, θα έχουν τον ίδιο καιρό την επόμενη μέρα με πιθανότητα 0.5, ενώ με πιθανότητα 0.25 θα είναι ηλιόλουστη η επόμενη μέρα.

- Υπολογίστε τον πίνακα μετάβασης P της αλυσίδας Markov που αντιστοιχεί στην αλλαγή του καιρού από μέρα σε μέρα στην χώρα του Οζ, σύμφωνα με τις παραπάνω πληροφορίες.
- Δημιουργείστε την αλυσίδα αυτή στη Matlab και δώστε το γράφημά της χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *dtmc* και *graphplot* αντίστοιχα.
- Υπολογίστε τις πιθανότητες της στατιστικής κατανομής και επαληθεύστε τις με εκείνες που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *asymptotics* της Matlab.
- Υπολογίστε τη n -οστή δύναμη του πίνακα μετάβασης, P^n , για $n = 1, \dots, 10$. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει το n ;

Παραθέστε τον κώδικά σας μαζί με τα ζητούμενα της άσκησης.