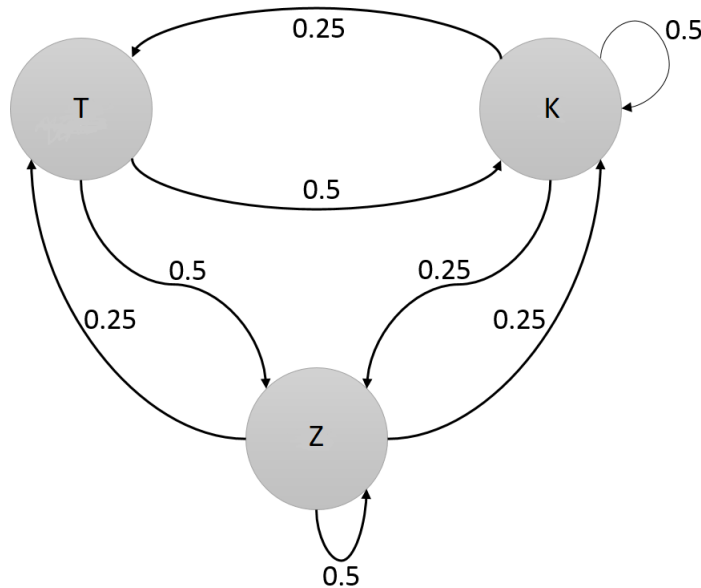


Άσκηση 1.

Χρησιμοποιούμε μια αλυσίδα Markov με τρεις καταστάσεις, K , Z και T , όπου κάθε κατάσταση αντιπροσωπεύει σε Κέρδος, Ζημία και δεν κερδίζει ή χάνει τίποτα αντίστοιχα. Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 1.

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\begin{bmatrix} r_{TT} & r_{TK} & r_{TZ} \\ r_{KT} & r_{KK} & r_{KZ} \\ r_{ZT} & r_{ZK} & r_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα Markov μας έχει μια μοναδική αναδρομική κλάση, η οποία είναι απεριοδική.

Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

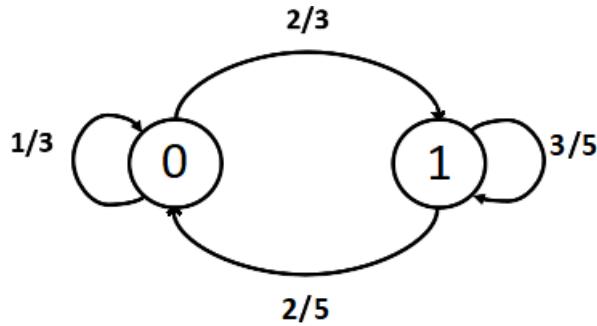
$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{4}(\pi_2 + \pi_3) \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3) + \frac{1}{4}\pi_2 \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\sum_i \pi_i = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = \frac{1}{5}, \quad \pi_2 = \pi_3 = \frac{2}{5}.$$

Άσκηση 2.

α) Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 2:



Σχήμα 2: Το γράφημα της αλυσίδας για την Άσκηση 2.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης γίνεται:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

β) Έχουμε:

$$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 0) = P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1) = \frac{3}{5}$$

και

$$P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0, X_{n-2} = 1) = P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0) = \frac{1}{3}.$$

γ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\begin{aligned}
 P(X_n = 0 \mid X_{n-2} = 1) &= P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0, X_{n-2} = 1) \cdot P(X_{n-1} = 0 \mid X_{n-2} = 1) + \\
 &\quad P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 1) \cdot P(X_{n-1} = 1 \mid X_{n-2} = 1) \\
 &= P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0) \cdot P(X_{n-1} = 0 \mid X_{n-2} = 1) + \\
 &\quad P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1) \cdot P(X_{n-1} = 1 \mid X_{n-2} = 1) \\
 &= p_{00} \cdot p_{10} + p_{10} \cdot p_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{28}{75}
 \end{aligned}$$

δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\begin{aligned}
 P(X_3 = 1) &= P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0) \cdot P(X_2 = 0) + P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \\
 &= P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0, X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0) + \\
 &\quad P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0, X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1) + \\
 &\quad P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1, X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0) + \\
 &\quad P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1, X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1) \\
 &= (P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0) \cdot P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) + \\
 &\quad P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)) \cdot P(X_1 = 0) + \\
 &\quad (P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0) \cdot P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) + \\
 &\quad P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)) \cdot P(X_1 = 1) \\
 &= (p_{01} \cdot p_{00} + p_{11} \cdot p_{01}) \cdot P(X_1 = 0) + (p_{01} \cdot p_{10} + p_{11} \cdot p_{11}) \cdot P(X_1 = 1) \\
 &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{281}{450}
 \end{aligned}$$

ε) Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

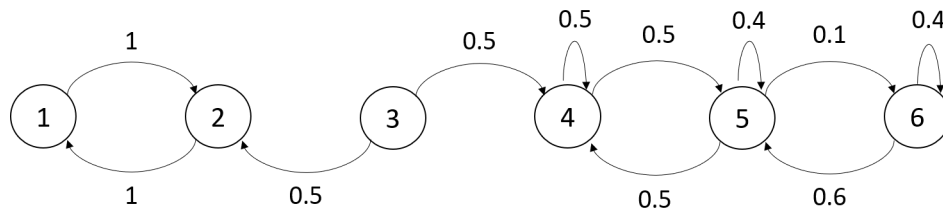
$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\pi_1}{3} + \frac{2\pi_2}{5} \\ \pi_2 &= \frac{2\pi_1}{3} + \frac{3\pi_2}{5}\end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\pi_1 + \pi_2 = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = \frac{3}{8} \quad \text{και} \quad \pi_2 = \frac{5}{8}.$$

Άσκηση 3.

α) Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Το γράφημα της αλυσίδας για την Άσκηση 3.

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, η κατάσταση 3 είναι μεταβατική, ενώ όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι έμμονες.

Υπάρχουν δύο κλάσεις έμμονων καταστάσεων. Η κλάση $\{1, 2\}$ που είναι περιοδική με περίοδο 2, και η κλάση $\{4, 5, 6\}$ που είναι απεριοδική.

β) Επειδή η κλάση $\{1, 2\}$ είναι περιοδική, δεν υπάρχουν στατικές πιθανότητες. Συγκεκριμένα, η ακολουθία r_{11} εναλλάσσεται μεταξύ 0 και 1 και δε συγκλίνει.

γ) Αν η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση 4, μένει μέσα στην απεριοδική κλάση έμμονων καταστάσεων $\{4, 5, 6\}$ και οι πιθανότητες n -οστής μετάβασης συγκλίνουν στις στατικές πιθανότητες π_i . Έχουμε $\pi_i = 0$ για $i \notin \{4, 5, 6\}$.

Άρα, οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

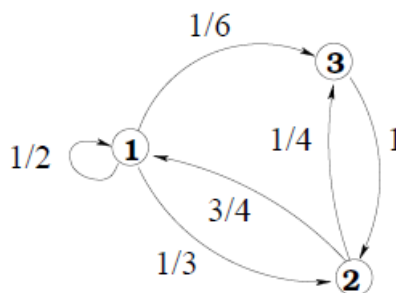
$$\begin{aligned}\pi_4 &= 0.5\pi_4 + 0.5\pi_5 \\ \pi_5 &= 0.5\pi_4 + 0.4\pi_5 + 0.6\pi_6 \\ \pi_6 &= 0.1\pi_5 + 0.4\pi_6\end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_4 = \pi_5 = \frac{6}{13} \quad \text{και} \quad \pi_6 = \frac{1}{13}.$$

Άσκηση 4.

α) Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Το γράφημα της αλυσίδας για την Άσκηση 4.

Από το διάγραμμα της αλυσίδας παρατηρούμε ότι κάθε κατάσταση είναι προσιτή από όλες τις άλλες καταστάσεις. Άρα η αλυσίδα αυτή αποτελεί μια κλάση έμμονων καταστάσεων, η οποία είναι απεριοδική αφού υπάρχει η κατάσταση 1 για την $p_{11}(n) > 0$ για $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} p_{13}^{(2)} &= \sum_{i=1}^3 p_{1i}p_{i3} \\ &= p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

γ) Αυτό που ζητείται είναι ουσιαστικά η πιθανότητα π_2 . Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 &= \frac{\pi_1}{3} + \pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{\pi_1}{6} + \frac{\pi_2}{4} \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = \frac{1}{2}, \quad \pi_2 = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \pi_3 = \frac{1}{6}.$$

Άσκηση 5.

α) Ο πίνακας μετάβασης για την αλυσίδα αυτή είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

β) Η αλυσίδα αποτελεί μια κλάση έμμοων καταστάσεων καθώς κάθε κατάσταση είναι προσιτή από όλες τις άλλες καταστάσεις. Ωστόσο, δεν είναι περιοδική καθώς οι καταστάσεις της δεν μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ξένα υποσύνολα ώστε όλες οι μεταβάσεις από το ένα υποσύνολο να οδηγούν στο επόμενο.

γ) Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

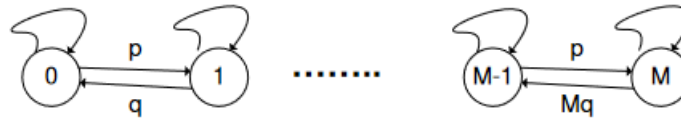
$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\pi_3}{4} \\ \pi_2 &= \frac{\pi_3}{4} \\ \pi_3 &= \pi_1 + \pi_2 + \frac{\pi_4}{2} + \frac{\pi_5}{2} \\ \pi_4 &= \frac{\pi_3}{4} + \frac{\pi_6}{2} \\ \pi_5 &= \frac{\pi_3}{4} + \frac{\pi_6}{2} \\ \pi_6 &= \frac{\pi_4}{2} + \frac{\pi_5}{2}\end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\sum_i \pi_i = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{12}, \quad \pi_3 = \frac{1}{3}, \quad \pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad \pi_6 = \frac{1}{6}.$$

Άσκηση 6.

α) Ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, το γράφημα της οποίας φαίνεται στο Σχήμα 5, με τόσες καταστάσεις όσοι και οι φοιτητές στην ουρά, δηλαδή $0, 1, 2, \dots, M$ (έστω $Mq < 1$).



Σχήμα 5: Το γράφημα της αλυσίδας για την Άσκηση 6.

β) Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα αυτή, οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\pi_i p = \pi_{i+1} (i+1)q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Ορίζουμε $\rho = p/q$, οπότε $\pi_{i+1} = \frac{\rho}{i+1} \pi_i$ άρα

$$\pi_i = \frac{\rho^i}{i!} \pi_0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Όμως $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_M = 1$ και επομένως

$$\pi_0 \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^M}{M!}\right) = 1,$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\pi_i = \frac{\frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Επομένως, ο μέσος αριθμός των πελατών στην ουρά είναι

$$\sum_{i=0}^M i\pi_i = \rho \cdot \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Άσκηση 7.

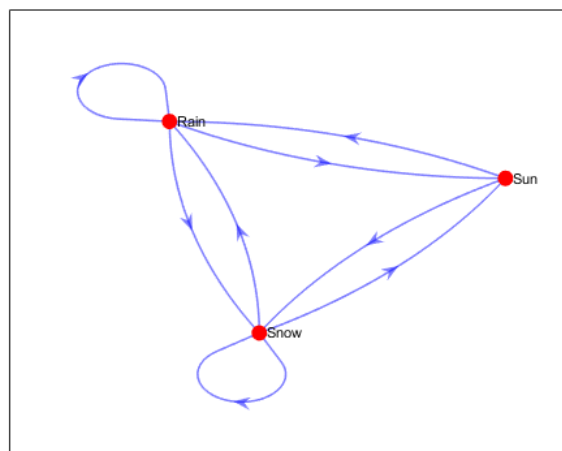
- α) Έστω οι καταστάσεις $S_1 = \{\beta\rho\chi\eta\}, S_2 = \{\eta\lambda\iota\omicron\varsigma\}, S_3 = \{\chi\iota\omicron\nu\iota\}$. Ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας Markov που προκύπτει σύμφωνα με τις πληροφορίες που δίνονται από την εκφώνηση είναι

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- β) Ο κώδικας στη Matlab για τη δημιουργία της αλυσίδας και του γραφήματός της φαίνεται παρακάτω:

```
P = [0.5 0.25 0.25; 0.5 0 0.5; 0.25 0.25 0.5];
weather = dtmc(P, 'StateNames', ["Rain" "Sun" "Snow"]);
figure; graphplot(weather);
```

Το γράφημα της αλυσίδας που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Το γράφημα της αλυσίδας για την Άσκηση 7.

γ) Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{4} \\ \pi_2 &= \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_3}{4} \\ \pi_3 &= \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{2}\end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\sum_i \pi_i = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = \pi_3 = 0.4 \text{ και } \pi_2 = 0.2$$

Οι τιμές αυτές της στατικής κατανομής επαληθεύονται και στη Matlab, όπως βλέπουμε παρακάτω.

```
>> pi = asymptotics(weather)

pi =

    0.4000    0.2000    0.4000
```

δ) Υπολογίζοντας τη n -οστή δύναμη του πίνακα μετάβασης, P^n , για $n = 1, \dots, 10$, στη Matlab χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κώδικα:

```
Pn = cell(10,1);
Pn{1} = P;
for n = 2:10
    Pn{n} = Pn{n-1}*P;
end
```

προκύπτουν οι πίνακες:

$$\begin{aligned}P^1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \\ P^2 &= \begin{bmatrix} 0.4375 & 0.1875 & 0.3750 \\ 0.3750 & 0.2500 & 0.3750 \\ 0.3750 & 0.1875 & 0.4375 \end{bmatrix} \\ P^3 &= \begin{bmatrix} 0.4063 & 0.2031 & 0.3906 \\ 0.4063 & 0.1875 & 0.4063 \\ 0.3906 & 0.2031 & 0.4063 \end{bmatrix} \\ P^4 &= \begin{bmatrix} 0.4023 & 0.1992 & 0.3984 \\ 0.3984 & 0.2031 & 0.3984 \\ 0.3984 & 0.1992 & 0.4023 \end{bmatrix} \\ P^5 &= \begin{bmatrix} 0.4004 & 0.2002 & 0.3994 \\ 0.4004 & 0.1992 & 0.4004 \\ 0.3994 & 0.2002 & 0.4004 \end{bmatrix} \\ P^6 &= \begin{bmatrix} 0.4001 & 0.2000 & 0.3999 \\ 0.3999 & 0.2002 & 0.3999 \\ 0.3999 & 0.2000 & 0.4001 \end{bmatrix} \\ P^7 = P^8 = P^9 = P^{10} &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το n , το P^n τείνει στη στατική πιθανότητα π , δηλαδή βλέπουμε στην πράξη ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{ij}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^n)_{ij} = \pi_j \quad \forall i, j.$$