

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/05/2021

Ημερομηνία Παράδοσης: 04/06/2021

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

Βρίσκεστε σε ένα κτίριο με αριθμημένα δωμάτια. Έστω ότι το δωμάτιο από το οποίο ξεκινάτε είναι το δωμάτιο 6-1. Όταν βρίσκεστε σε αυτό το δωμάτιο, με πιθανότητα 0.5 θα συνεχίσετε να βρίσκεστε σε αυτό την επόμενη χρονική στιγμή. Αν δε μείνετε σε αυτό το δωμάτιο, μπορείτε να μεταβείτε ισοπίθανα σε κάποιο από τα δωμάτια 6-2, 6-3, 9 ή 15. Όταν βρίσκεστε στο δωμάτιο 6-2, με πιθανότητα 0.5 μπορείτε να μεταβείτε την επόμενη χρονική στιγμή στο δωμάτιο 15, με πιθανότητα $3/8$ στο δωμάτιο 6-1 και με πιθανότητα $1/8$ στο δωμάτιο 6-3. Όταν βρίσκεστε στο δωμάτιο 6-3, με πιθανότητα 0.25 μπορείτε να μεταβείτε την επόμενη χρονική στιγμή στο δωμάτιο 9, με πιθανότητα $3/8$ στο δωμάτιο 6-1 και με πιθανότητα $3/8$ στο δωμάτιο 6-2. Αν σταματήσετε να βρίσκεστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6 (6-1, 6-2, 6-3) δεν μπορείτε να επιστρέψετε σε αυτά. Τέλος, τα δωμάτια 9 και 15 δεν επικοινωνούν μεταξύ τους.

(α) Δώστε το γράφημα της παραπάνω Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ποιες είναι μεταβατικές καταστάσεις και ποιες απορροφήσεως; Ποια είναι η πιθανότητα να σταματήσετε να βρίσκεστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6;

(β) Ποια η πιθανότητα να βρεθείτε στο δωμάτιο 15;

(γ) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να σταματήσετε να βρίσκεστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6;

Άσκηση 2.

Διαβάζετε ένα επισημονικό βιβλίο που περιέχει τρία κεφάλαια με τίτλους F, G και H. Αν μία τυχαία μέρα διαβάζετε το κεφάλαιο F, με πιθανότητα β διαβάζετε το ίδιο κεφάλαιο την επόμενη μέρα. Αλλιώς διαβάζετε το κεφάλαιο G. Αν μία τυχαία μέρα διαβάζετε το κεφάλαιο G, με πιθανότητα p διαβάζετε το κεφάλαιο H την επόμενη μέρα. Αλλιώς διαβάζετε το κεφάλαιο F. Αν μία τυχαία μέρα διαβάζετε το κεφάλαιο H, με πιθανότητα p διαβάζετε το ίδιο κεφάλαιο την επόμενη μέρα. Αλλιώς διαβάζετε το κεφάλαιο G.

(α) Σχεδιάστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως τη διαδικασία ανάγνωσης του βιβλίου και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Τι είδους αλυσίδα προκύπτει;

(β) Αν $\beta < 1$, τι ποσοστό του χρόνου θα διαβάζετε καθένα από τα τρία κεφάλαια (σε βάθος χρόνου);

(γ) Αν διαβάζετε το κεφάλαιο G μία μέρα, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των ημερών που θα σας πάρει για να μεταβείτε για πρώτη φορά στο κεφάλαιο F;

(δ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των ημερών που θα σας πάρει για να επανέρθετε για πρώτη φορά στο κεφάλαιο F δεδομένου ότι ξεκινήσατε από το κεφάλαιο F;

(ε) Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία Y_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ ως εξής: Y_1 είναι το πλήθος των ημερών που θα σας πάρει για να επανέρθετε για πρώτη φορά στο κεφάλαιο F δεδομένου ότι ξεκινήσατε από το κεφάλαιο F την μέρα 0. Y_k είναι το πλήθος των ημερών που θα σας πάρει για να επανέρθετε για k -στή φορά στο κεφάλαιο F δεδομένου ότι ξεκινήσατε από το κεφάλαιο F την μέρα 0.

Είναι οι τ.μ. $Y_1, Y_2 - Y_1, \dots, Y_k - Y_{k-1}$, $k > 1$ ανεξάρτητες; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι.

Άσκηση 3.

Εξετάζουμε τις επαναλαμβανόμενες και ανεξάρτητες μεταξύ τους ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος. Χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανές αλυσίδες, βρείτε το αναμενόμενο πλήθος ρίψεων έως ότου εμφανιστεί το μοτίβο HTH (Heads Tails Heads).

Άσκηση 4.

Έστω το σύνολο των ακεραίων από το 1 έως και το 5. Ξεκινώντας από το 1, σε κάθε επόμενο βήμα μετακινούμαστε ισοπίθानα σε έναν μεγαλύτερο αριθμό από αυτόν που ήδη βρισκόμαστε. Ποια είναι η κατάσταση απορροφήσεως αυτής της διαδικασίας και ποιος ο αναμενόμενος αριθμός μεταβάσεων έως ότου απορροφηθούμε από αυτήν;

Άσκηση 5.

Θεωρείστε μία ακολουθία από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας ίση με $1/4$. Έστω T το γεγονός ότι για πρώτη φορά έρχεται επιτυχία αμέσως μετά από επιτυχία, δηλαδή

$$T = \min\{n | X_n = X_{n-1} = \text{επιτυχία}\}.$$

Βρείτε την μέση τιμή $E[T]$, μοντελοποιώντας το πρόβλημα με τη βοήθεια Μαρκοβιανών αλυσίδων.

Άσκηση 6.

Υλοποιήστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 1 προγραμματιστικά, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους θεωρητικούς τύπους, καθώς και έτοιμες συναρτήσεις, βιβλιοθήκες και toolboxes που αφορούν Μαρκοβιανές αλυσίδες. Απαντήστε στα ερωτήματα (β) και (γ) πειραματικά και συγκρίνετε τα αποτελέσματα των πειραμάτων σας με τις θεωρητικές τιμές που έχετε ήδη υπολογίσει στην Άσκηση 1. Ενδεικτικά βήματα είναι τα εξής:

- Ορίστε μία μεταβλητή P ως τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας Markov.
- Προσομοιώστε για έναν επαρκή αριθμό από φορές (1000 προσομοιώσεις είναι αρκετές) την Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχετε ορίσει. Κάθε προσομοίωση ξεκινά από την αρχική κατάσταση 6-1 και ολοκληρώνεται έως ότου υπάρξει απορρόφηση από οποιαδήποτε κατάσταση απορροφήσεως.
Hint: Με τη χρήση της συνάρτησης *rand* μπορείτε να μοντελοποιήσετε την τυχαιότητα μετάβασης από μία κατάσταση s_t σε μία κατάσταση s_{t+1} . Συνδυάζοντας κατάλληλα τις συναρτήσεις *find*, *cumsum*, τη σωστή, κάθε φορά, γραμμή του πίνακα P και το αποτέλεσμα της *rand* θα μπορείτε να αποφανθείτε ποια θα είναι η εκάστοτε κατάσταση s_{t+1} σε κάθε βήμα της προσομοίωσής σας.
- Αξιοποιώντας τη μέθοδο της σχετικής συχνότητας (εκ των υστέρων ορισμός πιθανότητας) υπολογίστε πειραματικά την πιθανότητα να βρεθείτε στο δωμάτιο 15, στο σύνολο των 1000 προσομοιώσεων.
- Υπολογίστε για κάθε προσομοίωση το πλήθος των μεταβάσεων μέχρι να σταματήσετε να βρίσκεστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6. Αφού ολοκληρώσετε τις 1000 προσομοιώσεις υπολογίστε τον μέσο όρο των μεταβάσεων.

Προσεγγίζουν οι πειραματικές τιμές που υπολογίσατε τις αντίστοιχες θεωρητικές; Παραθέστε τον κώδικά σας μαζί με τα υπόλοιπα παραδοτέα της σειράς ασκήσεων.