

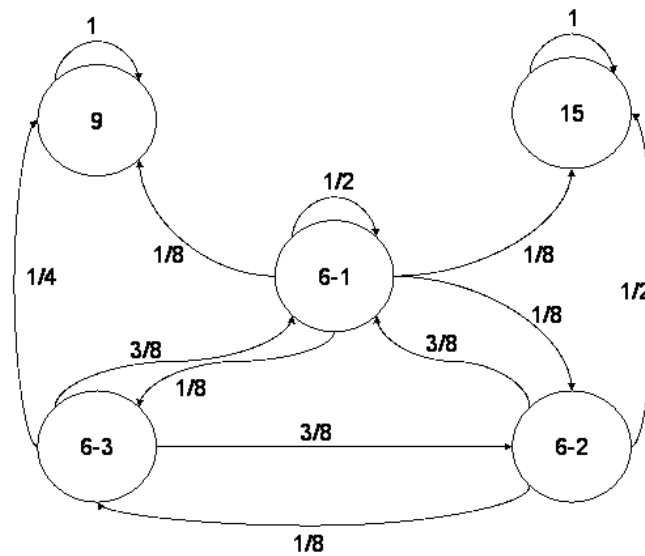
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το εξής:



Επιθεωρώντας το παραπάνω διάγραμμα, οι καταστάσεις $6-1$, $6-2$, και $6-3$ είναι όλες μεταβατικές, ενώ οι 9 και 15 είναι απορροφητικές, διότι δεν υπάρχει επιστροφή από αυτές. Τέλος, η πιθανότητα να σταματήσουμε να βρισκόμαστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6 είναι ίση με 1 .

(β) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορροφήσεως από την κατάσταση 15 . Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$\begin{aligned} a_{15} &= 1 \\ a_9 &= 0 \\ a_{6-1} &= \frac{1}{2}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{15} + \frac{1}{8}a_{6-2} + \frac{1}{8}a_9 + \frac{1}{8}a_{6-3} \\ a_{6-2} &= \frac{1}{2}a_{15} + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{6-3} \\ a_{6-3} &= \frac{1}{4}a_9 + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{3}{8}a_{6-2} \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, και γνωρίζοντας ότι ξεκινήσαμε από το δωμάτιο 6-1, έχουμε:

$$a_{6-1} = \frac{105}{184} \approx 0.571$$

Επίσης, για τα άλλα a_i προκύπτει ότι:

$$a_{6-2} = 0.77717$$

$$a_{6-3} = 0.50543$$

(γ) Ο ζητούμενος μέσος αριθμός μεταβάσεων αντιστοιχεί στον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την απορρόφηση για την μεταβατική κατάσταση 6-1. Από τη θεωρία έχουμε:

$$\mu_{15} = 0$$

$$\mu_9 = 0$$

$$\mu_{6-1} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{15} + \frac{1}{8}\mu_{6-2} + \frac{1}{8}\mu_9 + \frac{1}{8}\mu_{6-3}$$

$$\mu_{6-2} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{15} + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{6-3}$$

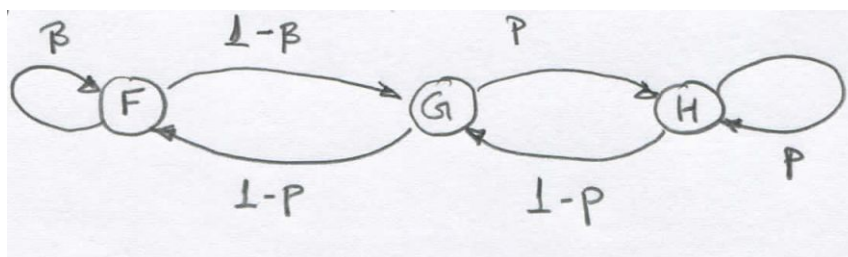
$$\mu_{6-3} = 1 + \frac{1}{4}\mu_9 + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{3}{8}\mu_{6-2}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνουμε:

$$\mu_{6-1} = \frac{162}{46} = \frac{81}{23} \approx 3.522$$

Άσκηση 2.

α) Δίνονται παρακάτω ο γράφος της αλυσίδας και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:



$$P = \begin{bmatrix} \beta & 1-\beta & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & p \end{bmatrix}.$$

Πρόκειται για μια αλυσίδα γεννήσεως-θανάτου.

β) Για $\beta < 1$, έχουμε μία κλάση επικοινωνίας που αποτελείται από τις καταστάσεις F, G, H . Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας δίνουν:

$$\pi_F = \frac{1-p}{1-\beta} \pi_G, \quad \pi_H = \frac{p}{1-p} \pi_G, \quad \pi_F + \pi_G + \pi_H = 1$$

Τελικά:

$$\pi_G = \frac{(1-p)(1-\beta)}{2-2p-\beta+p^2}$$

$$\pi_F = \frac{(1-p)^2}{2-2p-\beta+p^2}$$

$$\pi_H = \frac{p(1-\beta)}{2-2p-\beta+p^2}$$

γ) Έστω t_G και t_H ο μέσος αριθμός βημάτων (ημερών) μέχρι την πρώτη επίσκεψη στην κατάσταση F όταν ξεκινάμε από τις καταστάσεις G και H αντίστοιχα. Έχουμε ότι:

$$t_G = 1 + p \cdot t_H + (1-p) \cdot 0$$

$$t_H = 1 + (1-p) \cdot t_G + p \cdot t_H$$

Τελικά:

$$t_H = \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$t_G = \frac{p}{(1-p)^2}$$

δ)

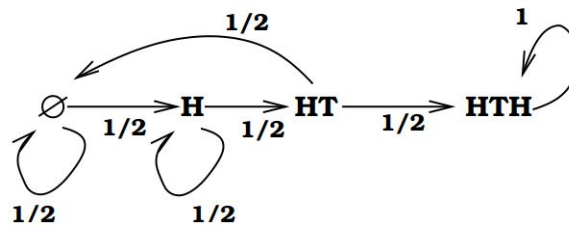
$$t_F^* = 1 + (1-\beta) \cdot t_G + 0 \cdot t_H = 1 + \frac{p \cdot (1-\beta)}{(1-p)^2}$$

ε) Η διαφορά $Y_k - Y_{k-1}$ είναι το πλήθος των ημερών που παίρνει για να πάμε από το κεφάλαιο F στο F , την k -στή φορά που συμβαίνει αυτό. Από την Μαρκοβιανή ιδιότητα, το παρελθόν και το μέλλον είναι ανεξάρτητα δεδομένης της παρούσας κατάστασης. Επομένως, δεδομένου ότι είμαστε τώρα στην κατάσταση F , το πλήθος των ημερών για να επιστρέψουμε στην F είναι ανεξάρτητο από οτιδήποτε έχει συμβεί στο παρελθόν. Έτσι, οι τ.μ. $(Y_k - Y_{k-1})$ είναι τελικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 3.

Θεωρούμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία ξεκινάει από μία αρχική κενή κατάσταση ($\emptyset$) (δεν έχουμε πετύχει ακόμη κανένα από τα στοιχεία του ζητούμενου μοτίβου) και επιθυμούμε να καταλήξει σε μία κατάσταση απορροφήσεως με όνομα HTH . Αν η πρώτη μας ρίψη φέρει κορώνα (H), τότε από την κενή κατάσταση μεταβαίνουμε σε μία κατάσταση με το όνομα H , αφού έχουμε πετύχει το πρώτο στοιχείο του μοτίβου. Αλλιώς, αν φέρουμε γράμματα (T), τότε παραμένουμε στην κατάσταση $\emptyset$. Όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση H και στην επόμενη ρίψη φέρουμε γράμματα (T), τότε μεταβαίνουμε σε μία κατάσταση με όνομα HT , αφού έχουμε πετύχει και το δεύτερο στοιχείο του μοτίβου.

Αλλιώς, αν φέρουμε κορώνα (H) στην επόμενη ρίψη, τότε το μοτίβο μας έχει εν μέρει χαλάσει, παραμένοντας όμως στην κατάσταση H και κάνοντας μία νέα αρχή στην προσπάθεια επίτευξης του ζητούμενου μοτίβου. Τέλος, όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση HT, είτε θα φέρουμε κορώνα (H) και θα καταλήξουμε στην κατάσταση απορροφήσεως HTH, έχοντας πετύχει τον στόχο μας, είτε θα φέρουμε γράμματα (T), πράγμα που θα μας οδηγήσει πίσω στην κατάσταση $\emptyset$, αφού το μοτίβο μας θα έχει τελείως χαλάσει και θα πρέπει να ξεκινήσουμε από την αρχή. Ακολουθεί το διάγραμμα μεταβάσεων παρακάτω:



Για να βρούμε το αναμενόμενο πλήθος ρίψεων που ζητείται, λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\mu_{\emptyset} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_{\emptyset} + \frac{1}{2} \cdot \mu_H$$

$$\mu_H = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_H + \frac{1}{2} \cdot \mu_{HT}$$

$$\mu_{HT} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_{\emptyset} + \frac{1}{2} \cdot \mu_{HTH}$$

$$\mu_{HTH} = 0$$

Τελικά: $\mu_{\emptyset} = 10$.

Άσκηση 4.

Η κατάσταση απορροφήσεως είναι το 5. Μπορούμε να ορίσουμε μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα με τον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τον αναμενόμενο αριθμό μεταβάσεων που ζητείται, λύνουμε το σύστημα:

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \mu_2 + \frac{1}{4} \cdot \mu_3 + \frac{1}{4} \cdot \mu_4 + \frac{1}{4} \cdot \mu_5$$

$$\mu_2 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \mu_3 + \frac{1}{3} \cdot \mu_4 + \frac{1}{3} \cdot \mu_5$$

$$\mu_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_4 + \frac{1}{2} \cdot \mu_5$$

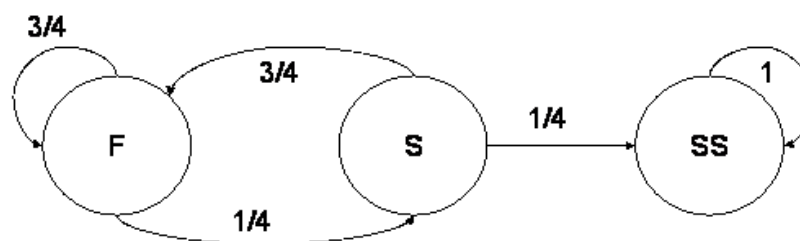
$$\mu_4 = 1 + \mu_5$$

$$\mu_5 = 0$$

Τελικά: $\mu_1 = 2.0833$.

Άσκηση 5.

Επιλύουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας που απεικονίζεται παρακάτω:



Η κατάσταση S δηλώνει επιτυχία, η F δηλώνει αποτυχία και η SS είναι μια απορροφητική κατάσταση που δηλώνει το γεγονός ότι το πείραμα τελειώνει όταν πάρουμε δύο επιτυχίες στη σειρά. Ορίζουμε την T' ως το χρόνο από την πρώτη προσπάθεια μέχρι που η ακολουθία SS συμβαίνει για πρώτη φορά. Τότε $T = T' + 1$ και $E[T] = E[T'] + 1$. Έπειτα, υπολογίζουμε τους $t_S = E[T' \mid X_0 = S]$, $t_F = E[T' \mid X_0 = F]$ δηλαδή τους αναμενόμενους χρόνους μέχρι την απορρόφηση αρχίζοντας από τις

καταστάσεις S και F αντίστοιχα. Επιλύοντας το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} t_S &= 1 + \frac{3}{4} \cdot t_F \\ t_F &= 1 + \frac{3}{4} \cdot t_F + \frac{1}{4} \cdot t_S \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι: $t_S = 16, t_F = 20$. Επομένως, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[T] &= E[T'] + 1 \\ &= E[T' | X_0 = F]P(X_0 = F) + E[T' | X_0 = S]P(X_0 = S) + 1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Ακολουθεί ενδεικτικό script με τη λύση της άσκησης. Έχει ανέβει και στο e-learn. Παρατηρούμε ότι οι πειραματικές τιμές βρίσκονται πολύ κοντά στις θεωρητικές. Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των προσομοιώσεων που θα τρέξουμε, τόσο μεγαλώνει και η ακρίβεια των πειραματικών αποτελεσμάτων που θα πάρουμε.

```

4
5 - P = [ 0.5   0.125  0.125  0.125  0.125;... % 6-1
6         0.375  0      0.125  0      0.5;... % 6-2
7         0.375  0.375  0      0.25   0;... % 6-3
8         0      0      0      1      0;... % 9
9         0      0      0      0      1 ]; % 15
10
11 - num_iters = 1000; % We will run 1000 simulations.
12 - total_transitions = 0; % Total number of transitions for all simulations.
13 - times_absorbed_by_15 = 0; % The number of simulations that the absorption state was state 15.
14
15 - init_state = 1;
16 - for iter = 1:num_iters
17 -     curr_state = init_state; % For each simulation we start at state 6-1.
18
19 -     while ( (curr_state ~= 4) && (curr_state ~= 5) ) % If we are not on an absorption state.
20 -         curr_state = find(rand() <= cumsum( P(curr_state,:) ), 1); % go to the next state.
21 -         total_transitions = total_transitions + 1;
22
23 -     end
24
25 -     if curr_state == 5
26 -         times_absorbed_by_15 = times_absorbed_by_15 + 1;
27 -     end
28
29 - end
30
31 - probab_absorbed_by_15 = times_absorbed_by_15 / num_iters;
32 - average_transitions_for_absorption = total_transitions / num_iters;

```

Workspace

Name	Value
average_trans...	3.5470
curr_state	5
init_state	1
iter	1000
num_iters	1000
P	5x5 double
probab_absorbe...	0.5730
times_absorb...	573
total_transitio...	3547