

**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**  
**Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Τελική Εξέταση**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**  
**7 Ιουνίου 2021 - Διάρκεια: 1.5 Ώρα (+20 λεπτά)**

**Θέμα 1 - 60 μονάδες.**

Θεωρήστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**(α) (12 μονάδες)** Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας. Αναγνωρίστε τις έμμονες (επαναληπτικές) και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και βρείτε αν και ποιες από αυτές είναι περιοδικές.

**(β) (5 μονάδες)** Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(X_{1005} = 3 \mid X_{1002} = 1)$ .

**(γ) (10 μονάδες)** Υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες (στατική κατανομή) δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Εάν ναι, ποιές είναι αυτές;

**(δ) (8 μονάδες)** Υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες (στατική κατανομή) δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 6; Εάν ναι, ποιές είναι αυτές;

**(ε) (5 μονάδες)** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1, αλλά αρχίζουμε να την παρατηρούμε αφού φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας (σε βάθος χρόνου). Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης μετάβασης που παρατηρούμε.

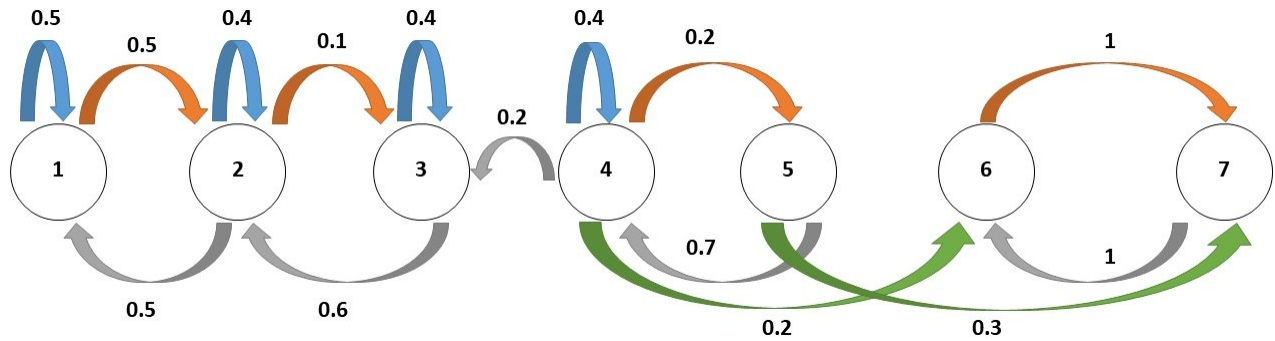
**(στ) (20 μονάδες)** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4.

**(στ-i) (10 μονάδες)** Για κάθε κλάση επικοινωνίας, υπολογίστε την πιθανότητα ότι το σύστημα απορροφάται από την κλάση αυτή.

**(στ-ii) (10 μονάδες)** Ποιος είναι ο μέσος χρόνος απορροφήσεως του συστήματος;

**Λύση**

(α) Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για το Θέμα 1.

Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές, και όλες οι υπόλοιπες έμμονες. Υπάρχουν 2 κλάσεις επικοινωνίας:

- Η  $\{1, 2, 3\}$ , που είναι μη-περιοδική
- Η  $\{6, 7\}$ , που είναι περιοδική

(β) Υπάρχουν 3 ξεχωριστές διαδρομές (ακολουθίες βημάτων) για να πάω από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 3 σε 3 βήματα:

- $1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X_{1005} = 3 \mid X_{1002} = 1) &= p_{11} \cdot p_{12} \cdot p_{23} + p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{23} + p_{12} \cdot p_{23} \cdot p_{33} \\ &= 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot 0.4 \\ &= 0.065 \end{aligned}$$

(γ) Όταν το σύστημα αρχίζει στην κατάσταση 1, μένει μέσα στη μη-περιοδική κλάση  $\{1, 2, 3\}$ , και επομένως υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες. Τις υπολογίζουμε λύνοντας το σύστημα των τοπικών εξισώσεων ισορροπίας, καθώς η κλάση  $\{1, 2, 3\}$  αποτελεί μία αλυσίδα γεννήσεως-θανάτου:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 \\ \frac{1}{10}\pi_2 = \frac{6}{10}\pi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_2 = 6 \cdot \pi_3 \end{cases}$$

Επίσης, είναι:  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ . Άρα, τελικά έχουμε:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{6}{13} \\ \pi_2 = \frac{6}{13} \\ \pi_3 = \frac{1}{13} \end{cases}$$

**(δ)** Η κλάση  $\{6, 7\}$  είναι περιοδική, και επομένως δεν υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες.

**(ε)** Η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά 1 είναι:

$$\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{10}\pi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{13} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{13} = \frac{18}{65}$$

**(στ)** Έστω ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4.

**(στ-i)** Υπολογίζουμε πρώτα τις πιθανότητες απορρόφησης,  $\alpha_4$  και  $\alpha_5$ , του συστήματος από την κλάση  $\{1, 2, 3\}$ , δεδομένου ότι ξεκινά από τις καταστάσεις 4 και 5 αντίστοιχα:

$$\begin{cases} \alpha_4 = 0.2 \cdot 1 + 0.4 \cdot \alpha_4 + 0.2 \cdot \alpha_5 \\ \alpha_5 = 0.7 \cdot \alpha_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = \frac{10}{23} \\ \alpha_5 = \frac{7}{23} \end{cases}$$

Επομένως, η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την κλάση  $\{6, 7\}$  όταν ξεκινά από την 4 είναι:  $1 - \alpha_4 = \frac{13}{23}$ .

**(στ-ii)** Οι μέσοι χρόνοι απορροφήσεως του συστήματος είναι:

$$\begin{cases} \mu_4 = 1 + 0.4 \cdot \mu_4 + 0.2 \cdot \mu_5 \\ \mu_5 = 1 + 0.7 \cdot \mu_4 \end{cases}$$

Άρα, τελικά είναι:  $\mu_4 = \frac{60}{23}$  και  $\mu_5 = \frac{65}{23}$ .

**Θέμα 1 - 60 μονάδες.**

Θεωρήστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.35 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**(α) (12 μονάδες)** Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας. Αναγνωρίστε τις έμμονες (επαναληπτικές) και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και βρείτε αν και ποιες από αυτές είναι περιοδικές.

**(β) (5 μονάδες)** Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(X_{1004} = 1 \mid X_{1001} = 3)$ .

**(γ) (10 μονάδες)** Υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες (στατική κατανομή) δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Εάν ναι, ποιές είναι αυτές;

**(δ) (8 μονάδες)** Υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες (στατική κατανομή) δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 6; Εάν ναι, ποιές είναι αυτές;

**(ε) (5 μονάδες)** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1, αλλά αρχίζουμε να την παρατηρούμε αφού φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας (σε βάθος χρόνου). Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης μετάβασης που παρατηρούμε.

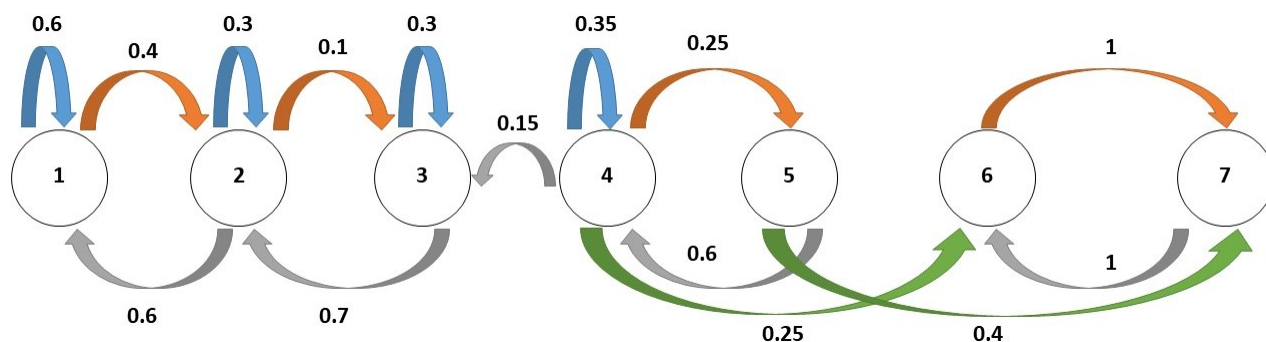
**(στ) (20 μονάδες)** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4.

**(στ-i) (10 μονάδες)** Για κάθε κλάση επικοινωνίας, υπολογίστε την πιθανότητα ότι το σύστημα απορροφάται από την κλάση αυτή.

**(στ-ii) (10 μονάδες)** Ποιος είναι ο μέσος χρόνος απορροφήσεως του συστήματος;

**Λύση**

(α) Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 2:



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για το Θέμα 1.

Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές, και όλες οι υπόλοιπες έμμονες. Υπάρχουν 2 κλάσεις επικοινωνίας:

- Η  $\{1, 2, 3\}$ , που είναι μη-περιοδική
- Η  $\{6, 7\}$ , που είναι περιοδική

(β) Υπάρχουν 3 ξεχωριστές διαδρομές (ακολουθίες βημάτων) για να πάω από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 1 σε 3 βήματα:

- $3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X_{1004} = 1 \mid X_{1001} = 3) &= p_{32} \cdot p_{21} \cdot p_{11} + p_{32} \cdot p_{22} \cdot p_{21} + p_{33} \cdot p_{32} \cdot p_{21} \\ &= 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.6 \\ &= 0.504 \end{aligned}$$

(γ) Όταν το σύστημα αρχίζει στην κατάσταση 1, μένει μέσα στη μη-περιοδική κλάση  $\{1, 2, 3\}$ , και επομένως υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες. Τις υπολογίζουμε λύνοντας το σύστημα των τοπικών εξισώσεων ισορροπίας, καθώς η κλάση  $\{1, 2, 3\}$  αποτελεί μία αλυσίδα γεννήσεως-θανάτου:

$$\begin{cases} \frac{4}{10}\pi_1 = \frac{6}{10}\pi_2 \\ \frac{7}{10}\pi_3 = \frac{1}{10}\pi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{2} \cdot \pi_2 \\ \pi_3 = \frac{1}{7} \cdot \pi_2 \end{cases}$$

Επίσης, είναι:  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ . Άρα, τελικά έχουμε:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{21}{37} \\ \pi_2 = \frac{14}{37} \\ \pi_3 = \frac{2}{37} \end{cases}$$

(δ) Η κλάση  $\{6, 7\}$  είναι περιοδική, και επομένως δεν υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες.

**(ε)** Η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά 1 είναι:

$$\frac{4}{10}\pi_1 + \frac{1}{10}\pi_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{21}{37} + \frac{1}{10} \cdot \frac{14}{37} = \frac{49}{185}$$

**(στ)** Έστω ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4.

**(στ-i)** Υπολογίζουμε πρώτα τις πιθανότητες απορρόφησης,  $\alpha_4$  και  $\alpha_5$ , του συστήματος από την κλάση  $\{1, 2, 3\}$ , δεδομένου ότι ξεκινά από τις καταστάσεις 4 και 5 αντίστοιχα:

$$\begin{cases} \alpha_4 = 0.15 \cdot 1 + 0.35 \cdot \alpha_4 + 0.25 \cdot \alpha_5 \\ \alpha_5 = 0.6 \cdot \alpha_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = \frac{3}{10} \\ \alpha_5 = \frac{9}{50} \end{cases}$$

Επομένως, η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την κλάση  $\{6, 7\}$  όταν ξεκινά από την 4 είναι:  $1 - \alpha_4 = \frac{7}{10}$ .

**(στ-ii)** Οι μέσοι χρόνοι απορροφήσεως του συστήματος είναι:

$$\begin{cases} \mu_4 = 1 + 0.35 \cdot \mu_4 + 0.25 \cdot \mu_5 \\ \mu_5 = 1 + 0.6 \cdot \mu_4 \end{cases}$$

Άρα, τελικά είναι:  $\mu_4 = \frac{5}{2}$  και  $\mu_5 = \frac{5}{2}$ .

**Θέμα 1 - 60 μονάδες.**

Θεωρήστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**(α) (12 μονάδες)** Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας. Αναγνωρίστε τις έμμονες (επαναληπτικές) και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και βρείτε αν και ποιες από αυτές είναι περιοδικές.

**(β) (5 μονάδες)** Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(X_{1003} = 3 \mid X_{1000} = 2)$ .

**(γ) (10 μονάδες)** Υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες (στατική κατανομή) δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Εάν ναι, ποιές είναι αυτές;

**(δ) (8 μονάδες)** Υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες (στατική κατανομή) δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 6; Εάν ναι, ποιές είναι αυτές;

**(ε) (5 μονάδες)** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1, αλλά αρχίζουμε να την παρατηρούμε αφού φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας (σε βάθος χρόνου). Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης μετάβασης που παρατηρούμε.

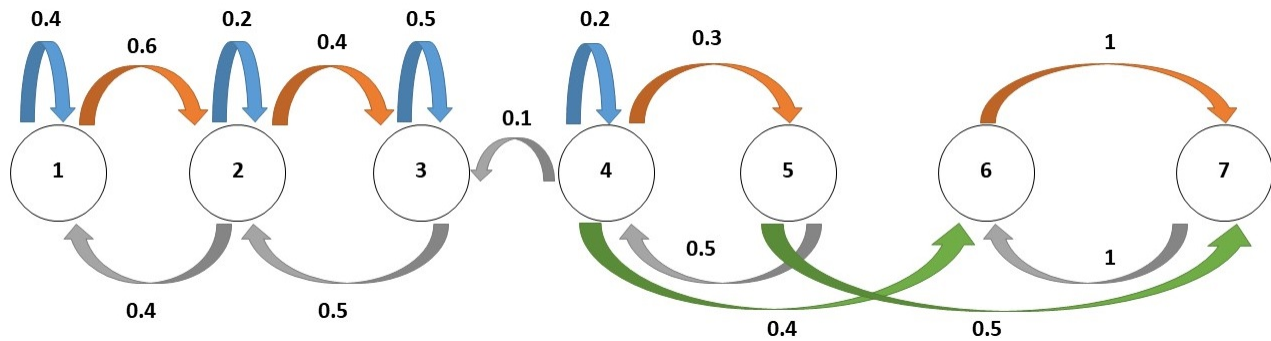
**(στ) (20 μονάδες)** Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4.

**(στ-i) (10 μονάδες)** Για κάθε κλάση επικοινωνίας, υπολογίστε την πιθανότητα ότι το σύστημα απορροφάται από την κλάση αυτή.

**(στ-ii) (10 μονάδες)** Ποιος είναι ο μέσος χρόνος απορροφήσεως του συστήματος;

**Λύση**

(α) Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 3:



Σχήμα 3: Το διάγραμμα καταστάσεων για το Θέμα 1.

Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές, και όλες οι υπόλοιπες έμμονες. Υπάρχουν 2 κλάσεις επικοινωνίας:

- Η  $\{1, 2, 3\}$ , που είναι μη-περιοδική
- Η  $\{6, 7\}$ , που είναι περιοδική

(β) Υπάρχουν 5 ξεχωριστές διαδρομές (ακολουθίες βημάτων) για να πάω από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 3 σε 3 βήματα:

- $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X_{1003} = 3 \mid X_{1000} = 2) &= p_{21} \cdot p_{12} \cdot p_{23} + p_{22} \cdot p_{22} \cdot p_{23} + p_{23} \cdot p_{32} \cdot p_{23} + p_{22} \cdot p_{23} \cdot p_{33} + p_{23} \cdot p_{33} \cdot p_{33} \\ &= 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \\ &= 0.332 \end{aligned}$$

(γ) Όταν το σύστημα αρχίζει στην κατάσταση 1, μένει μέσα στη μη-περιοδική κλάση  $\{1, 2, 3\}$ , και επομένως υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες. Τις υπολογίζουμε λύνοντας το σύστημα των τοπικών εξισώσεων ισορροπίας, καθώς η κλάση  $\{1, 2, 3\}$  αποτελεί μία αλυσίδα γεννήσεως-θανάτου:

$$\begin{cases} \frac{6}{10}\pi_1 = \frac{4}{10}\pi_2 \\ \frac{5}{10}\pi_3 = \frac{4}{10}\pi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{4}{6} \cdot \pi_2 \\ \pi_3 = \frac{4}{5} \cdot \pi_2 \end{cases}$$



Επίσης, είναι:  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ . Άρα, τελικά έχουμε:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{10}{37} \\ \pi_2 = \frac{15}{37} \\ \pi_3 = \frac{12}{37} \end{cases}$$

**(δ)** Η κλάση  $\{6, 7\}$  είναι περιοδική, και επομένως δεν υπάρχουν οι στατικές πιθανότητες.

**(ε)** Η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά 1 είναι:

$$\frac{6}{10}\pi_1 + \frac{4}{10}\pi_2 = \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{37} + \frac{4}{10} \cdot \frac{15}{37} = \frac{105}{370}$$

**(στ)** Έστω ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4.

**(στ-i)** Υπολογίζουμε πρώτα τις πιθανότητες απορρόφησης,  $\alpha_4$  και  $\alpha_5$ , του συστήματος από την κλάση  $\{6, 7\}$ , δεδομένου ότι ξεκινά από τις καταστάσεις 4 και 5 αντίστοιχα:

$$\begin{cases} \alpha_4 = 0.2 \cdot \alpha_4 + 0.3 \cdot \alpha_5 + 0.4 \cdot 1 \\ \alpha_5 = 0.5 \cdot \alpha_4 + 0.5 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = \frac{11}{13} \\ \alpha_5 = \frac{12}{13} \end{cases}$$

Επομένως, η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την κλάση  $\{1, 2, 3\}$  όταν ξεκινά από την 4 είναι:  $1 - \alpha_4 = \frac{2}{13}$ .

**(στ-ii)** Οι μέσοι χρόνοι απορροφήσεως του συστήματος είναι:

$$\begin{cases} \mu_4 = 1 + 0.2 \cdot \mu_4 + 0.3 \cdot \mu_5 \\ \mu_5 = 1 + 0.5 \cdot \mu_4 \end{cases}$$

Άρα, τελικά είναι:  $\mu_4 = 2$  και  $\mu_5 = 2$ .

**Θέμα 2 - 40 μονάδες.**

Ένα δίκαιο **πεντάεδρο** ζάρι ρίχνεται διαδοχικά έως ότου να έχουν εμφανιστεί όλες οι πλευρές τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε την κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα από την οποία να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό ρίψεων έως ότου εμφανιστούν όλες οι πλευρές.

**(α) (20 μονάδες)** Ορίζουμε την κατάσταση του συστήματος ως εξής. Η κατάσταση,  $X_n$ , τη χρονική στιγμή  $n$  ισούται με το πλήθος των *διαφορετικών* πλευρών που έχουν εμφανιστεί στις  $n$  πρώτες ρίψεις. Ορίστε το χώρο των καταστάσεων  $S$ , υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης απλού βήματος και δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας. Αναγνωρίστε τις έμμονες (επαναληπτικές) και τις μεταβατικές καταστάσεις.

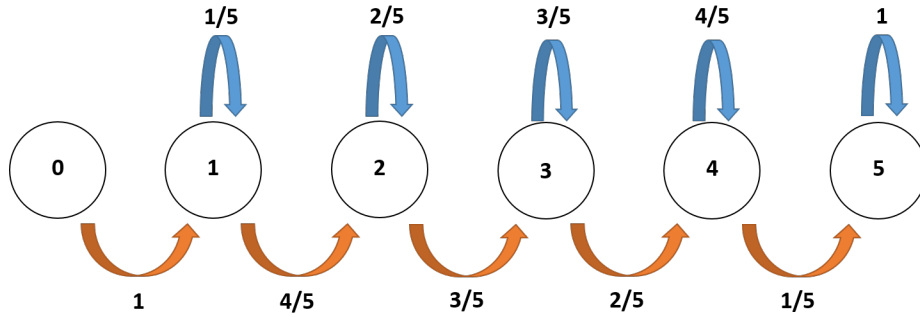
**(β) (20 μονάδες)** Υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο απορροφήσεως του συστήματος όταν ξεκινά από την κατάσταση 0. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων έως ότου εμφανιστούν όλες οι πλευρές;

**Λύση**

(α) Έστω  $X_n$  ο αριθμός των διαφορετικών ενδείξεων που έχουν εμφανιστεί στις  $n$  πρώτες ρίψεις. Η  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων  $S = \{1, 2, \dots, 5\}$ , αρχική κατάσταση  $X = 0$  και πιθανότητες μετάβασης  $p_{ij}$  που υπολογίζονται ως εξής:

Αν  $X_n = i$ , δηλαδή έχουν εμφανιστεί ήδη  $i$  διαφορετικές ενδείξεις, τότε αν η  $(n + 1)$ -ρίψη είναι μία από τις  $i$  (με πιθανότητα  $i/5$ ), η νέα κατάσταση θα είναι επίσης  $X_{n+1} = i$ , ενώ αν η  $(n + 1)$ -ρίψη είναι μία από τις  $5 - i$  που δεν έχουν εμφανιστεί, η νέα κατάσταση θα είναι η  $X_{n+1} = i + 1$ . Επομένως:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{5}, & j = i \\ 1 - \frac{i}{5}, & j = i + 1, \quad j \leq 5 \end{cases}$$



Σχήμα 4: Το διάγραμμα καταστάσεων για το Θέμα 2.

Η διαδικασία έχει απορροφητική κατάσταση την 5, ενώ οι 1, ..., 4 είναι παροδικές.

(β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο απορρόφησης του συστήματος από την κατάσταση 5, όταν ξεκινάμε από την 0, δηλαδή το  $\mu_0$ :

$$\begin{aligned} \mu_5 &= 0 \\ \mu_i &= 1 + \frac{i}{5}\mu_i + \frac{5-i}{5}\mu_{i+1}, & i = 0, 1, \dots, 4 \\ \Rightarrow (1 - \frac{i}{5})\mu_i &= 1 + \frac{5-i}{5}\mu_{i+1} \\ \Rightarrow \frac{5-i}{5}(\mu_i - \mu_{i+1}) &= 1 \\ \Rightarrow \mu_i - \mu_{i+1} &= \frac{5}{5-i}, & i = 0, 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

$$\text{Για } i = 0, \quad \mu_0 - \mu_1 = 1$$

$$\text{Για } i = 1, \quad \mu_1 - \mu_2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Για } i = 2, \quad \mu_2 - \mu_3 = \frac{5}{3}$$

$$\text{Για } i = 3, \quad \mu_3 - \mu_4 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Για } i = 4, \quad \mu_4 - \mu_5 = 5$$

Προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε ότι  $\mu_0 \approx 11.42$  ρίψεις.

**Θέμα 2 - 40 μονάδες.**

Ένα δίκαιο **εξάεδρο** ζάρι ρίχνεται διαδοχικά έως ότου να έχουν εμφανιστεί όλες οι πλευρές τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε την κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα από την οποία να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό ρίψεων έως ότου εμφανιστούν όλες οι πλευρές.

**(α) (20 μονάδες)** Ορίζουμε την κατάσταση του συστήματος ως εξής. Η κατάσταση,  $X_n$ , τη χρονική στιγμή  $n$  ισούται με το πλήθος των *διαφορετικών* πλευρών που έχουν εμφανιστεί στις  $n$  πρώτες ρίψεις. Ορίστε το χώρο των καταστάσεων  $S$ , υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης απλού βήματος και δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας. Αναγνωρίστε τις έμμονες (επαναληπτικές) και τις μεταβατικές καταστάσεις.

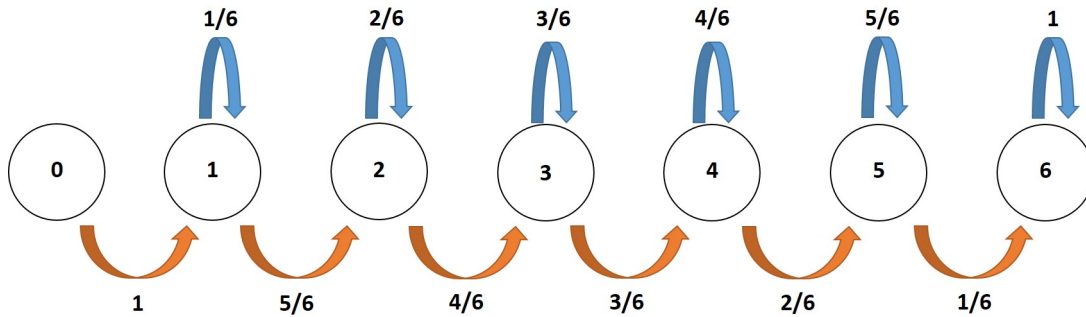
**(β) (20 μονάδες)** Υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο απορροφήσεως του συστήματος όταν ξεκινά από την κατάσταση 0. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων έως ότου εμφανιστούν όλες οι πλευρές;

**Λύση**

(α) Έστω  $X_n$  ο αριθμός των διαφορετικών ενδείξεων που έχουν εμφανιστεί στις  $n$  πρώτες ρίψεις. Η  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων  $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ , αρχική κατάσταση  $X = 0$  και πιθανότητες μετάβασης  $p_{ij}$  που υπολογίζονται ως εξής:

Αν  $X_n = i$ , δηλαδή έχουν εμφανιστεί ήδη  $i$  διαφορετικές ενδείξεις, τότε αν η  $(n + 1)$ -ρίψη είναι μία από τις  $i$  (με πιθανότητα  $i/6$ ), η νέα κατάσταση θα είναι επίσης  $X_{n+1} = i$ , ενώ αν η  $(n + 1)$ -ρίψη είναι μία από τις  $6 - i$  που δεν έχουν εμφανιστεί, η νέα κατάσταση θα είναι η  $X_{n+1} = i + 1$ . Επομένως:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{6}, & j = i \\ 1 - \frac{i}{6}, & j = i + 1, \quad j \leq 6 \end{cases}$$



Σχήμα 5: Το διάγραμμα καταστάσεων για το Θέμα 2.

Η διαδικασία έχει απορροφητική κατάσταση την 6, ενώ οι 1, ..., 5 είναι παροδικές.

(β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο απορρόφησης του συστήματος από την κατάσταση 6, όταν ξεκινάμε από την 0, δηλαδή το  $\mu_0$ :

$$\begin{aligned} \mu_6 &= 0 \\ \mu_i &= 1 + \frac{i}{6}\mu_i + \frac{6-i}{6}\mu_{i+1}, & i = 0, 1, \dots, 5 \\ \Rightarrow (1 - \frac{i}{6})\mu_i &= 1 + \frac{6-i}{6}\mu_{i+1} \\ \Rightarrow \frac{6-i}{6}(\mu_i - \mu_{i+1}) &= 1 \\ \Rightarrow \mu_i - \mu_{i+1} &= \frac{6}{6-i}, & i = 0, 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

$$\text{Για } i = 0, \quad \mu_0 - \mu_1 = 1$$

$$\text{Για } i = 1, \quad \mu_1 - \mu_2 = \frac{6}{5}$$

$$\text{Για } i = 2, \quad \mu_2 - \mu_3 = \frac{6}{4}$$

$$\text{Για } i = 3, \quad \mu_3 - \mu_4 = \frac{6}{3}$$

$$\text{Για } i = 4, \quad \mu_4 - \mu_5 = \frac{6}{2}$$

$$\text{Για } i = 5, \quad \mu_5 - \mu_6 = 6$$

Προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε ότι  $\mu_0 = 14.7$  ρίψεις.

**Θέμα 2 - 40 μονάδες.**

Ένα δίκαιο **επτάεδρο** ζάρι ρίχνεται διαδοχικά έως ότου να έχουν εμφανιστεί όλες οι πλευρές τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε την κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα από την οποία να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό ρίψεων έως ότου εμφανιστούν όλες οι πλευρές.

**(α) (20 μονάδες)** Ορίζουμε την κατάσταση του συστήματος ως εξής. Η κατάσταση,  $X_n$ , τη χρονική στιγμή  $n$  ισούται με το πλήθος των *διαφορετικών* πλευρών που έχουν εμφανιστεί στις  $n$  πρώτες ρίψεις. Ορίστε το χώρο των καταστάσεων  $S$ , υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης απλού βήματος και δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας. Αναγνωρίστε τις έμμονες (επαναληπτικές) και τις μεταβατικές καταστάσεις.

**(β) (20 μονάδες)** Υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο απορροφήσεως του συστήματος όταν ξεκινά από την κατάσταση 0. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων έως ότου εμφανιστούν όλες οι πλευρές;

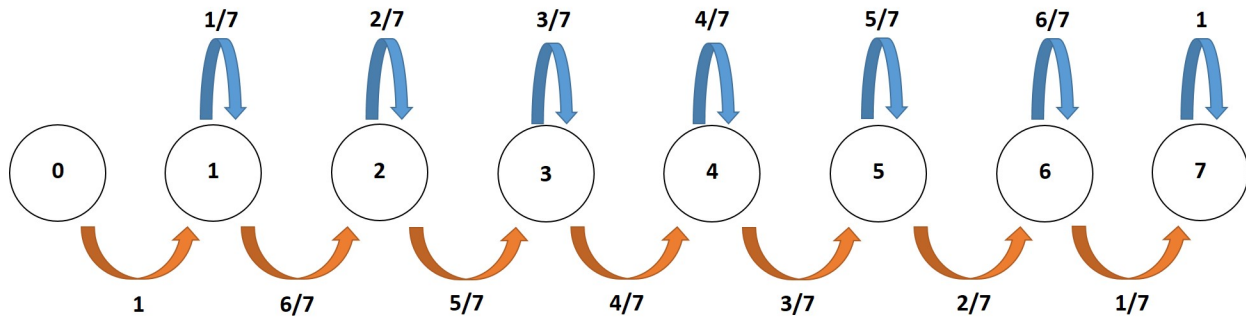


**Λύση**

(α) Έστω  $X_n$  ο αριθμός των διαφορετικών ενδείξεων που έχουν εμφανιστεί στις  $n$  πρώτες ρίψεις. Η  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων  $S = \{1, 2, \dots, 7\}$ , αρχική κατάσταση  $X = 0$  και πιθανότητες μετάβασης  $p_{ij}$  που υπολογίζονται ως εξής:

Αν  $X_n = i$ , δηλαδή έχουν εμφανιστεί ήδη  $i$  διαφορετικές ενδείξεις, τότε αν η  $(n + 1)$ -ρίψη είναι μία από τις  $i$  (με πιθανότητα  $i/7$ ), η νέα κατάσταση θα είναι επίσης  $X_{n+1} = i$ , ενώ αν η  $(n + 1)$ -ρίψη είναι μία από τις  $7 - i$  που δεν έχουν εμφανιστεί, η νέα κατάσταση θα είναι η  $X_{n+1} = i + 1$ . Επομένως:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{7}, & j = i \\ 1 - \frac{i}{7}, & j = i + 1, \quad j \leq 7 \end{cases}$$



Σχήμα 6: Το διάγραμμα καταστάσεων για το Θέμα 2.

Η διαδικασία έχει απορροφητική κατάσταση την 7, ενώ οι 1, ..., 6 είναι παροδικές.

(β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο απορρόφησης του συστήματος από την κατάσταση 7, όταν ξεκινάμε από την 0, δηλαδή το  $\mu_0$ :

$$\begin{aligned} \mu_7 &= 0 \\ \mu_i &= 1 + \frac{i}{7}\mu_i + \frac{7-i}{7}\mu_{i+1}, & i = 0, 1, \dots, 6 \\ \Rightarrow (1 - \frac{i}{7})\mu_i &= 1 + \frac{7-i}{7}\mu_{i+1} \\ \Rightarrow \frac{7-i}{7}(\mu_i - \mu_{i+1}) &= 1 \\ \Rightarrow \mu_i - \mu_{i+1} &= \frac{7}{7-i}, & i = 0, 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

$$\text{Για } i = 0, \quad \mu_0 - \mu_1 = 1$$

$$\text{Για } i = 1, \quad \mu_1 - \mu_2 = \frac{7}{6}$$

$$\text{Για } i = 2, \quad \mu_2 - \mu_3 = \frac{7}{5}$$

$$\text{Για } i = 3, \quad \mu_3 - \mu_4 = \frac{7}{4}$$

$$\text{Για } i = 4, \quad \mu_4 - \mu_5 = \frac{7}{3}$$

$$\text{Για } i = 5, \quad \mu_5 - \mu_6 = \frac{7}{2}$$

$$\text{Για } i = 6, \quad \mu_6 - \mu_7 = 7$$

Προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε ότι  $\mu_0 = 18.15$  ρίψεις.