ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1: Ροπογεννήτριες

Άσκηση 1

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y.
2. Να εξετάσετε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.
3. Να βρεθούν:
   (α΄) Η μέση τιμή των τ.μ. X και Y, $E[X]$ και $E[Y]$, αντίστοιχα.
   (β΄) Η διασπορά των τ.μ. X και Y, $var[X]$ και $var[Y]$, αντίστοιχα.

Λύση

1. Η περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 12xy(1-x)dy = 12x(1-x)\int_0^1 ydy \\ &= 12x(1-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{12x(1-x)}{2} \\ \Rightarrow f_X(x) &= 6x(1-x)\ . \end{aligned}$$

Η περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. Y:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^1 12xy(1-x)dx = 12y\int_0^1 x(1-x)dx \\ &= 12y\int_0^1 x - x^2 dx = 12y\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 12y\frac{1}{6} \\ \Rightarrow f_Y(y) &= 2y\ . \end{aligned}$$

2. Για να είναι οι τ.μ. X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y), \forall\ x, y\ \in\ (0,1).$$

Έχουμε ότι

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = 6x(1-x)\cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}(x,y)\ \forall\ x,y\ \in\ (0,1).$$

Επομένως, οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

3. (α΄) Η μέση τιμή της X είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^2(1-x)dx \\ &= 6\int_0^1 x^2 - x^3 dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ \Rightarrow E[X] &= \frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

Για τη μέση τιμή της τ.μ. Y έχουμε

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}\left[y^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ .$$

(β΄) Η διασπορά της Y δίδεται ως

$$var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]$$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E[X^2]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^3(1-x)dx \\ &= 6\int_0^1 x^3 - x^4 dx = 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ \Rightarrow E[X^2] &= \frac{3}{10} \ . \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{3}{10} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{20} \ .$$

Αντίστοιχα, για τη διασπορά της Y έχουμε,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y)dy = \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy = \int_0^1 2y^3 dy \\ &= 2\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{4} \\ \Rightarrow E[Y^2] &= \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$var(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \ .$$

Άσκηση 2

Μας δίδεται η διακριτή τ.μ. X για την οποία ισχύει ότι:

$$M_X(s) = a + b \cdot e^{2s} + c \cdot e^{4s}, \quad E[X] = 3, \quad var(X) = 2 \ .$$

Υπολογίστε τις σταθερές a, b, c καθώς και τη σ.π.π. της τ.μ. X .

Λύση

Έχουμε τρεις άγνωστες σταθερές και τρεις εξισώσεις, τις οποίες αξιοποιούμε ως εξής:

- Η ροπογεννήτρια για $s = 0$ ισούται με $E[e^{0 \cdot X}] = E[1] = 1$, άρα:

$$\begin{aligned} &M_X(s)\Big|_{s=0} = 1 \\ \Rightarrow &a + b \cdot e^{2\cdot 0} + c \cdot e^{4 \cdot 0} = 1 \\ \Rightarrow &a + b + c = 1 \ . \end{aligned}$$

- Γνωρίζουμε ότι η $E[X]$ (η πρώτη ροπή της X), ισούται με την πρώτη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο $s = 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}M_X(s)\Big|_{s=0} = E[X] \\
\Rightarrow&\frac{d}{ds}(a + b\cdot e^{2s} + c\cdot e^{4s})\Big|_{s=0} = 3 \\
\Rightarrow&2b\cdot e^{2s} + 4c\cdot e^{4s}\Big|_{s=0} = 3 \\
\Rightarrow&2b + 4c = 3\ .
\end{aligned}$$

- Γνωρίζουμε ότι η δεύτερη ροπή $E[X^2]$ ισούται με την δεύτερη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο $s = 0$:

$$E[X^2] = var(X) + E^2[X] = 2 + 9 = 11 \tag{1}$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2}M_X(s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(2b\cdot e^{2s} + 4c\cdot e^{4s})\Big|_{s=0} = (4b\cdot e^{2s} + 16c\cdot e^{4s})\Big|_{s=0} = 4b + 16c \tag{2}$$

Από τις (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$4b + 16c = 11$$

Λύνοντας λοιπόν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων,

$$\begin{aligned}
2b + 4c &= 3 \\
a + b + c &= 1 \\
4b + 16c &= 11
\end{aligned}$$

προκύπτει ότι $a = \frac{1}{8},\ b = \frac{2}{8},\ c = \frac{5}{8}$, και επομένως,

$$M_X(s) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8}\cdot e^{2s} + \frac{5}{8}\cdot e^{4s}\ .$$

Για να βρούμε την σ.π.π. της X χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των ροπογεννητριών που λέει ότι είναι μοναδικά αντιστρέψιμες. Έτσι, συγκρίνοντας την $M_X(s)$ με τον γενικό τύπο της ροπογεννήτριας διακριτής τ.μ., έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
M_X(s) &= \sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x) \\
\frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot e^{2s} + \frac{5}{8} \cdot e^{4s} &= \sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x) \; .
\end{aligned}
$$

Από την μοναδικότητα των ροπογεννητριών, συμπαιρένουμε ότι

$$
p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{2}{8}, & x = 2 \\ \frac{5}{8}, & x = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}
$$

Άσκηση 3

Η τ.μ. Z έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$
M_Z(s) = \frac{a - 3s}{s^2 - 6s + 8}
$$

1. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς a.
2. Βρείτε τη σ.π.π. της τ.μ. Z.
3. Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Z]$.
4. Υπολογίστε τη διασπορά $var(Z)$.

Λύση

1. Γνωρίζουμε ότι $M_Z(s)\Big|_{s=0} = 1$. Άρα,

$$
\begin{aligned}
M_Z(s)\Big|_{s=0} &= 1 \\
\Rightarrow \frac{a}{8} &= 1 \\
\Rightarrow a &= 8 \; .
\end{aligned}
$$

   Επομένως,

$$
M_Z(s) = \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8}
$$

2. Για να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μοναδικότητας των ροπογεννητριώς, θα πρέπει να μετατρέψουμε το παραπάνω κλάσμα σε ένα άθροισμα της γενικής μορφής $\sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x)$, είτε σε ένα άθροισμα ή πολλαπλασιασμό κάποιων επί μέρους ροπογεννητριών γνωστών κατανομών.

   Θυμηθείτε: Ο μετασχηματισμός ενός μείγματος κατανομών $f_Y(y) = p_1 f_{X_1}(y) + \dots p_n f_{X_1}(y)$ ισούται με $M_Y(s) = p_1 M_{X_1}(s) + \cdots + p_n M_{X_n}(s)$, ενώ ο μετασχηματισμός της κατανομής που προέρχεται από το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $Z = X_1 + \cdots + X_n$ ισούται με $M_Z(s) = M_{X_1} \times \cdots \times M_{X_n}$.

   Εδώ, αρχικά αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$M_Z(s) = \frac{8-3s}{s^2-6s+8} = \frac{8-3s}{(s-4)(s-2)} \triangleq \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = (s-4) \cdot M_Z(s)\Big|_{s=4} = \frac{8-3s}{s-2}\Big|_{s=4} = \frac{8-12}{2} = -2$$

$$B = (s-2) \cdot M_Z(s)\Big|_{s=2} = \frac{8-3s}{s-4}\Big|_{s=2} = \frac{8-6}{-2} = -1$$

   Άρα

$$M_Z(s) = \frac{-2}{s-4} + \frac{-1}{s-2}$$

   Παρατηρούμε ότι μοιάζει με άθροισμα ροπογεννητριών εκθετικής τ.μ., όπου ισχύει γενικά ότι $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$, όπου λ η παράμετρος της εκθετικής κατανομής. Μπορούμε να φέρουμε την $M_Z(s)$ σε ένα μείγμα ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών ως εξής:

$$M_Z(s) = \frac{-2}{s-4} + \frac{-1}{s-2} = \frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4-s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2-s}$$

   Επομένως, η $M_Z(s)$ είναι ένα μείγμα δύο ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών, με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα. Επομένως, έχουμε

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} 4 \cdot e^{-4z} + \frac{1}{2} 2 \cdot e^{-2z}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

3. *Α΄ Τρόπος*

$$E[Z] = \frac{d}{ds} M_Z(s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2}\Bigg|_{s=0} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Β΄ Τρόπος

$$E[Z] = \int_0^{+\infty} z \cdot f_Z(z)dz = \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{1}{2}(4 \cdot e^{-4z} + 2 \cdot e^{-2z})dz$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} z \cdot 4e^{-4z}dz + \int_0^{+\infty} z \cdot 2e^{-2z})dz\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \ ,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι μέσες τιμές των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα.

4. *Α΄ Τρόπος*

$$E[Z^2] = \frac{d^2}{ds^2}M_Z(s)\Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s}\right)\Big|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^3} + \frac{1}{(2-s)^3}\Big|_{s=0} = \frac{5}{16}$$

Άρα

$$var(Z) = E[Z^2] - E^2[Z] = \frac{5}{16} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{64}.$$

Β΄ Τρόπος

$$E[Z^2] = \int_0^{+\infty} z^2 \cdot f_Z(z)dz = \int_0^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{2}(4 \cdot e^{-4z} + 2 \cdot e^{-2z})dz$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} 4z^2 \cdot e^{-4z}dz + \int_0^{+\infty} 2z \cdot e^{-2z}dz\right) = \frac{1}{2}(\frac{2}{4^2} + \frac{2}{2^2}) = \frac{5}{16} \ ,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι ροπές δεύτερης τάξης των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, η δεύτερη ροπή της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ, είναι $E[X^2] = var(X) + E^2[X] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

Άσκηση 4

Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. Y και Z. Η τ.μ. Y είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda = 2$. Η τ.μ. Z είναι Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$.

1. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $2Z + 3$.

2. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Y + Z$.

Λύση
Για την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$.
Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda-s}$.

1. Για τον γραμμικό συνδυασμό μιας τ.μ., $Y = aX + b$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(aX+b)}] = e^{sb}E[e^{saX}] = e^{sb}M_X(sa) \ .$$

   Επομένως,
$$M_{2Z+3} = e^{3s}M_Z(2s) = e^{3s} \cdot e^{3(e^{2s}-1)} \ .$$

2. Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $Y = X_1 + \cdots + X_n$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1+\cdots+X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \cdots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \cdots \times M_{X_n}(s) \ .$$

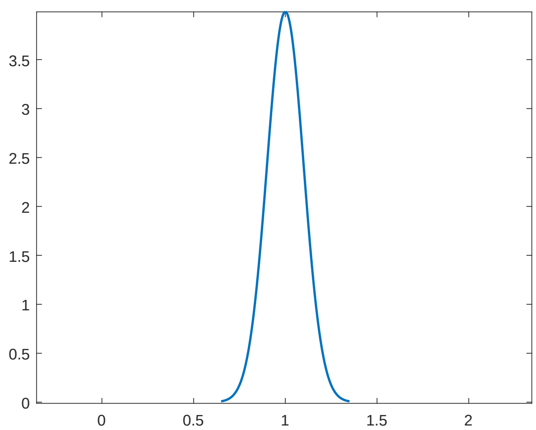
   Επομένως,
$$M_{Y+Z} = M_Y(s) \cdot M_Z(s) = \frac{2}{2-s} \cdot e^{3(e^s-1)} \ .$$

Άσκηση 5

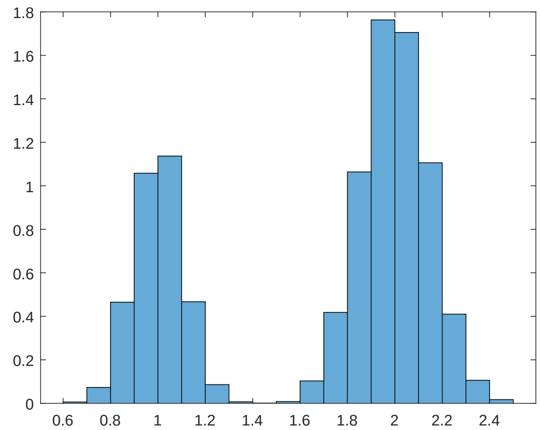
Είδαμε ότι το άθροισμα σταθερού αριθμού N ανεξάρτητων Κανονικών τ.μ. $Y = X_1 + \cdots + X_N$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, ακολουθεί Κανονική κατανομή $Y \sim \mathcal{N}(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2)$. Βρείτε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι όταν το N είναι τυχαία μεταβλητή (και όχι σταθερός αριθμός), το άθροισμα N ανεξάρτητων Κανονικών τ.μ. ΔΕΝ ακολουθεί Κανονική κατανομή.
Λύση
Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα τυχαίου αριθμού κανονικών κατανομών παράγει νούμερα, που με μεγάλη πιθανότητα είναι μακριά από τη μέση τιμή της κατανομής τους (σε αντίθεση με την Κανονική κατανομή, που η πυκνότητα πιθανότητας μεγιστοποιείται στην μέση τιμή).

Έστω ότι η N παίρνει τιμές 1 και 2, με πιθανότητα p και $1-p$, αντίστοιχα και έστω οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1 \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι το σ^2 είναι αρκετά μικρό, και επομένως οι τυχαίες μεταβλητές έχουν κατανομή που είναι κατά πολύ συγκεντρωμένη γύρω από τη μέση τιμή της. Για παράδειγμα, στο Γράφημα 1 έχουμε την Κανονική κατανομή με $\sigma^2 = 0.01$.

Το άθροισμα $Y = \sum_{i=1}^N X_i$, παίρνει τιμές είτε πολύ κοντά στο 1 (όταν $N = 1$), είτε πολύ κοντά στο 2 (όταν $N = 2$). Η μέση τιμή της Y όμως είναι $E[Y] = E[X_1]p_N(1) + E[X_1 + X_2]p_N(2) = 1 \cdot p + 2 \cdot (1-p) = 2 - p$, που γενικά είναι μακριά από τις τιμές 1 και 2. Επομένως, η Y δεν μπορεί να είναι Κανονική τ.μ. Το Γράφημα 2 δείχνει το ιστόγραμμα 10.000 δειγμάτων από την παραπάνω κατανομή, με $p = 1/3$.



Σχήμα 1: Η σ.π.π. της Κανονικής κατανομής με $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 0.01$.



Σχήμα 2: Το ιστόγραμμα της $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$.