

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2021  
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3

Άσκηση 1.

Είστε ένα φτωχός και μόνος Jedi που καταζητείται από την Αυτοκρατορία για υποκίνηση εξεγέρσεων ενάντια της. Μία ομάδα από Stormtroopers ανακαλύπτει το καταφύγιό σας και σας στήνει ενέδρα. Κάνοντας κίνηση για να πιάσετε το φωτόσπαθό σας, συνειδητοποιείτε ότι αυτό λείπει! Θυμάστε ότι το χθεσινό βράδυ το χάσατε σε μια παρτίδα Gwent από έναν ασπρομάλη μυστήριο τύπο, με μενταγιόν στο σχήμα κεφαλής λύκου και με διακαή πόθο να προσθέσει άλλο ένα σπαθί στην πλούσια συλλογή του! Φευ! Οι Stormtroopers ανοίγουν πυρ! Αποφασίζετε ότι ο πιο πιθανός τρόπος να ξεφύγετε είναι να τρέξετε γρήγορα προς την έξοδο, στην οποία μπορείτε να φτάσετε μέσα σε 1 λεπτό. Κάθε δευτερόλεπτο η πιθανότητα να σας πετύχει κάποιος από τα πυρά των Stormtroopers είναι  $p = 0.01$  (ανεξάρτητα από δευτερόλεπτο σε δευτερόλεπτο).

- α') Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι να σας πετύχει κάποιος από τους Stormtroopers για πρώτη φορά.
- β') Προτού επιλέξετε να ακολουθήσετε την παραπάνω τακτική, θυμηθήκατε με δάκρυα συγκίνησης στα μάτια εκείνο το εξάμηνο που είχατε παρακολουθήσει το μάθημα των Εφαρμοσμένων Στοχαστικών Διαδικασιών, όταν ήσασταν ακόμα ένα ξέγνοιαστος και φιλόδοξος Padawan. Η πιο σωστή απόφαση της ζωής σας! Κάνοντας, λοιπόν, έναν πρόχειρο υπολογισμό στο μυαλό σας, συνειδητοποιήσατε ότι όντως με αυτήν την τακτική θα γλιτώνατε εύκολα από τους Stormtroopers. Ποιος είναι ο υπολογισμός που κάνατε που σας οδήγησε σε αυτήν την απόφαση;
- γ') Τα πρώτα 20 δευτερόλεπτα δε σας έχει πετύχει ακόμη κανένας Stormtrooper. Ποια είναι τώρα η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι αυτό να συμβεί (μετρώντας από  $t = 20$ ).

Λύση.

- α') Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια στοχαστική διαδικασία  $X_1, X_2, \dots$  ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με κάθε δοκιμή  $X_i$  να αποτελεί το γεγονός ότι τα πυρά των Stormtroopers σας πετυχαίνουν με πιθανότητα  $p$ :

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} 0.01, & x = 1 \\ 0.99, & x = 0 \end{cases}$$

Ο χρόνος  $T$  μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μια στοχαστική διαδικασία Bernoulli μοντελοποιείται ως μια Γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο  $p$ , άρα η ζητούμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι Γεωμετρική με  $p = 0.01$ :

$$p_T(t) = \begin{cases} (1-p)^{t-1} \cdot p = (1-0.01)^{t-1} \cdot 0.01 = (0.99)^{t-1} \cdot 0.01, & t \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- β') Η μέση τιμή της Γεωμετρικής με παράμετρο  $p$  είναι  $\frac{1}{p}$ , επομένως ο μέσος χρόνος μέχρι να σας πετύχουν τα πυρά για πρώτη φορά θα είναι  $\frac{1}{0.01} = 100$  δευτερόλεπτα. Έχοντας στο μυαλό σας ότι η έξοδος απέχει μόλις 1 λεπτό = 60 δευτερόλεπτα, θεωρήσατε ότι θα καταφέρατε να ξεφύγετε προτού σας πετύχουν οι Stormtroopers.

γ') Επειδή η διαδικασία Bernoulli δεν έχει μνήμη, δεν έχει σημασία αν σας πέτυχε ή όχι κάποιος Stormtrooper το 1ο δευτερόλεπτο, το 2ο, το 20ο ή το 200ο. Επομένως, η μέση τιμή του χρόνου μετρώντας από τη στιγμή  $t = 20$  θα είναι και πάλι  $\frac{1}{0.01} = 100$  δευτερόλεπτα.

## Άσκηση 2

Ένας υπολογιστής εξυπηρετεί προγράμματα που καταθέτουν δύο χρήστες. Ο χρόνος χωρίζεται σε χρονικές σχισμές (time slots). Μία χρονική σχισμή μπορεί να είναι ανενεργή με πιθανότητα  $p_I = 1/6$  και ενεργή με πιθανότητα  $p_B = 5/6$ . Κατά τη διάρκεια μιας ενεργούς σχισμής, υπάρχει πιθανότητα  $p_{1/B} = 2/5$  (αντίστοιχα,  $p_{2/B} = 3/5$ ) ότι εκτελείται ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 (αντίστοιχα, από το χρήστη 2). Υποθέτουμε ότι γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα.

(α) Βρείτε την πιθανότητα ότι ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 εκτελείται για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια της 4ης χρονικής σχισμής.

(β) Δεδομένου ότι ακριβώς 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές, βρείτε την πιθανότητα ότι η 6η ανενεργή χρονική σχισμή είναι η σχισμή 12.

(γ) Βρείτε το μέσο αριθμό των χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανόμενης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

(δ) Βρείτε το μέσο αριθμό των ενεργών χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανόμενης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

(ε) Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά του αριθμού των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

## Λύση

(α) Κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής σχισμής, η πιθανότητα εκτέλεσης ενός προγράμματος από το χρήστη 1 είναι  $p_1 = p_{1|B} \cdot p_B = (2/5) \cdot (5/6) = 1/3$ . Η εκτέλεση προγραμμάτων από το χρήστη 1 αποτελεί διαδικασία Bernoulli, με παράμετρο  $p_1$ , συνεπώς:

$$P(1\text{η εκτέλεση προγράμματος από το χρήστη 1 κατά την 4η χρονική σχισμή}) = p_1(1-p_1)^3 = 0.0988.$$

(β) Ουσιαστικά, ζητείται η πιθανότητα η χρονική σχισμή 11 να είναι ενεργή και η 12 να είναι ανενεργή (καθώς οι 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές). Εφόσον τα γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p_B \cdot p_I = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.1389.$$

(γ) Σε κάθε χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα  $p_1 = 1/3$ , ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η χρονική στιγμή εκτέλεσης του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι Pascal τυχαία μεταβλητή τάξης 5, με παράμετρο  $p_1 = 1/3$  και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της Pascal τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_1} = \frac{5}{1/3} = 15.$$

(δ) Σε κάθε ενεργή χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα  $p_{1|B} = 2/5$ , ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η ζητούμενη τ.μ. είναι Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο  $p_{1|B} = 2/5$  και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_{1|B}} = \frac{5}{2/5} = \frac{25}{2} = 12.5.$$

(ε) Ο αριθμός  $T$  των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι ίσος με τον αριθμό  $B$  των ενεργών σχισμών μέχρι την εκτέλεση του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1, μειωμένο κατά 5. Ο αριθμός των ενεργών σχισμών (“δοκιμές”) μέχρι το 5ο πρόγραμμα του χρήστη 1 (“επιτυχία”) είναι μία Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο  $p_{1|B} = 2/5$  και άρα

$$p_B(t) = \binom{t-1}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{t-5}, \quad t = 5, 6, \dots$$

Εφόσον  $T = B - 5$ , ισχύει ότι  $p_T(t) = p_B(t+5)$  και άρα

$$p_T(t) = \binom{t+4}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους της μέσης τιμής και της διασποράς της Pascal τ.μ.  $B$ , παίρνουμε τελικά

$$E[T] = E[B] - 5 = \frac{25}{2} - 5 = 7.5$$

και

$$\text{var}(T) = \text{var}(B) = \frac{5(1 - (2/5))}{(2/5)^2}$$

### Άσκηση 3

Ο αδερφός σας παίζει το ίδιο βιντεοπαιχνίδι συνεχώς. Υποθέστε ότι κερδίζει κάθε παιχνίδι με πιθανότητα  $p$ , ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα άλλων παιχνιδιών. Τα μεσάνυχτα μπαίνετε στο δωμάτιό του και διαπιστώνετε ότι χάνει το παρόν παιχνίδι. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των χαμένων παιχνιδιών μεταξύ της πιο πρόσφατης νίκης και της πρώτης μελλοντικής νίκης;

### Λύση

Έστω  $t$  ο αριθμός του παιχνιδιού όταν μπαίνετε στο δωμάτιο. Έστω  $M$  ο αριθμός του πιο πρόσφατου παιχνιδιού που κέρδισε ο αδερφός σας και έστω  $N$  ο αριθμός του πρώτου παιχνιδιού που θα κερδίσει στο μέλλον. Η τυχαία μεταβλητή  $X = N - t$  είναι γεωμετρικά κατανομημένη με παράμετρο  $p$ . Λόγω συμμετρίας και ανεξαρτησίας των παιχνιδιών, η τυχαία μεταβλητή  $Y = t - M$  είναι επίσης γεωμετρικά κατανομημένη με παράμετρο  $p$ . Τα παιχνίδια που έχει χάσει μεταξύ της πιο πρόσφατης επιτυχίας και της πρώτης μελλοντικής επιτυχίας είναι όλα μεταξύ  $M$  και  $N$ . Το πλήθος τους  $L$  είναι

$$L = N - M - 1 = X + Y - 1$$

ώστε, η  $L + 1$  έχει μία Pascal PMF τάξης 2, δηλ.

$$P(L+1=k) = \binom{k-1}{1} p^2 (1-p)^{k-2}.$$

Άρα,

$$p_L(l) = P_L(L=l) = P(L+1=l+1) = \binom{l}{1} p^2 (1-p)^{l-1}, \quad l=1,2,\dots$$

#### Άσκηση 4

Για να εξοικονομήσει λεφτά για τις σπουδές του, ο Κώστας εργάζεται ως πλασιέ δειγμάτων τροφών για σκύλους. Πηγαίνει από πόρτα σε πόρτα αλλά αφήνει το δείγμα μόνο όταν του ανοίξουν την πόρτα και υπάρχει σκύλος στο σπίτι. Σε κάθε επίσκεψή του, η πιθανότητα να του ανοίξουν την πόρτα είναι  $3/4$  ενώ η πιθανότητα να ζει σκύλος στο σπίτι είναι  $2/3$ . Υποθέστε ότι τα γεγονότα 'ανοίγει η πόρτα' και 'ζει σκύλος στο σπίτι' είναι όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους.

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι ο Κώστας δίνει το πρώτο δείγμα στην τρίτη επίσκεψή του σε σπίτι;
- (β) Δεδομένου ότι έχει δώσει ακριβώς 4 δείγματα στις 8 πρώτες επισκέψεις του, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα δώσει το 5ο δείγμα στην 11η επίσκεψη;
- (γ) Ποια η πιθανότητα ότι δίνει το δεύτερο δείγμα στην πέμπτη επίσκεψή του σε σπίτι;
- (δ) Δεδομένου ότι δεν έδωσε το 2ο δείγμα στη 2η επίσκεψή του, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα δώσει το 2ο δείγμα στην 5η επίσκεψη;
- (ε) Λέμε ότι ο Κώστας χρειάζεται νέα προμήθεια δειγμάτων αμέσως μετά την επίσκεψη στο σπίτι όπου αφήνει το τελευταίο του δείγμα. Αν έχει αρχίσει με 2 δείγματα, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα πραγματοποιήσει τουλάχιστον 5 επισκέψεις πριν χρειαστεί νέα προμήθεια;

#### Λύση

Μια επιτυχής επίσκεψη συμβαίνει με πιθανότητα  $p = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

- (α) Ο Κώστας θα δώσει το πρώτο δείγμα στην τρίτη επίσκεψή του σε σπίτι, αν στις δύο πρώτες του επισκέψεις αποτύχει, ενώ η τρίτη είναι επιτυχής. Εφόσον τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, η πιθανότητα της παραπάνω ακολουθίας να συμβεί είναι ίση με:

$$(1-p)(1-p)p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- (β) Το ζητούμενο απαιτεί να αποτύχει να δώσει δείγμα κατά την ένατη και δέκατη επίσκεψη και να επιτύχει κατά την ενδέκατη επίσκεψη. Για μια διαδικασία Bernoulli το αποτέλεσμα αυτών των τριών επισκέψεων είναι ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα των άλλων επισκέψεων, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι και πάλι:

$$(1-p)(1-p)p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- (γ) Επιθυμούμε την πιθανότητα όπου  $L_2$ , του δευτέρου βαθμού άφιξης χρόνου, να ισούται με πέντε επισκέψεις. Γνωρίζουμε ότι  $p_{L_2}$  είναι Pascal PMF, έτσι έχουμε:

$$p_{L_2} = \binom{5-1}{2-1} p^2 (1-p)^{5-2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{8}$$

- (δ) Εδώ ζητάμε την δεσμευμένη πιθανότητα όπου η πειραματική τιμή της  $L_2$  ισούται με 5 δεδομένου ότι είναι μεγαλύτερη από 2.

$$\begin{aligned} p_{L_2|L_2>2}(5|L_2 > 2) &= \frac{p_{L_2}(5)}{P(L_2 > 2)} = \frac{p_{L_2}(5)}{1 - p_{L_2}(2)} \\ &= \frac{\binom{5-1}{2-1} p^2 (1-p)^{5-2}}{1 - \binom{2-1}{2-1} p^2 (1-p)^0} = \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- (ε) Η πιθανότητα όπου ο Κώστας θα συμπληρώσει τουλάχιστον πέντε επισκέψεις προτού χρειαστεί νέα προμήθεια ισούται με την πιθανότητα η πειραματική τιμή της  $L_2$  να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 5.

$$\begin{aligned} P(L_2 \geq 5) &= 1 - P(L_2 \leq 4) = 1 - \sum_{l=2}^4 \binom{l-1}{2-1} p^2 (1-p)^{l-2} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$