

Φροντιστήριο 4

Άσκηση 1.

Θεωρήστε μία στοχαστική διαδικασία Poisson με $\lambda > 0$.

- α') Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε ακριβώς μία άφιξη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$ και $(2, 3]$.
- β') Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(0, 2]$ και 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 3]$.
- γ') Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 2]$ δεδομένου ότι έχουμε δύο αφίξεις στο διάστημα $(0, 2]$ και δύο αφίξεις στο διάστημα $(1, 3]$.

Λύση.

- α') Τα χρονικά διαστήματα είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν ίδια διάρκεια, ίση με 1 μονάδα χρόνου. $\tau_1 = (0, 1]$, $\tau_2 = (1, 2]$, $\tau_3 = (2, 3]$.

Κάθε διάστημα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ , άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:
$$P(k, \tau_1) * P(k, \tau_2) * P(k, \tau_3) = \left(\frac{(\lambda \tau)^k * e^{-\lambda \tau}}{k!} \right)^3 = (\lambda * e^{-\lambda})^3 = \lambda^3 * e^{-3\lambda}, k = 1 \text{ άφιξη}$$

- β') Έστω $N(t_1, t_2)$ το πλήθος των αφίξεων στο χρονικό διάστημα $(t_1, t_2]$. Τότε όπως ξέρουμε $N(t_1, t_2) \sim \text{Poisson}$ με παράμετρο $\lambda(t_2 - t_1)$.
Μας ζητείται η πιθανότητα $A = \{N(0, 2] = 2, N(1, 3] = 2\}$.

Για να ισχύει το A πρέπει:

- είτε $\{N(0, 1] = 0, N(1, 2] = 2, N(2, 3] = 0\}$
- είτε $\{N(0, 1] = 2, N(1, 2] = 0, N(2, 3] = 2\}$
- είτε $\{N(0, 1] = 1, N(1, 2] = 1, N(2, 3] = 1\}$

Άρα το A είναι η ένωση ξένων μεταξύ τους γεγονότων.

$B_{ijk} = \{N(0, 1] = i, N(1, 2] = j, N(2, 3] = k\}, i, j, k$ ανεξάρτητα μεταξύ τους.
Άρα $P(A) = P(B_{020}) + P(B_{202}) + P(B_{111})$

$$P(B_{020}) = P(N(0, 1] = 0) * P(N(1, 2] = 2) * P(N(2, 3] = 0) = \frac{(\lambda * 1)^0 * e^{-\lambda * 1}}{0!} * \frac{(\lambda * 1)^2 * e^{-\lambda * 1}}{2!} * \frac{(\lambda * 1)^0 * e^{-\lambda * 1}}{0!} = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^2 * e^{-\lambda}}{2!} * e^{-\lambda}$$

$$P(B_{202}) = P(N(0, 1] = 2) * P(N(1, 2] = 0) * P(N(2, 3] = 2) = \frac{(\lambda * 1)^2 * e^{-\lambda * 1}}{2!} * \frac{(\lambda * 1)^0 * e^{-\lambda * 1}}{0!} * \frac{(\lambda * 1)^2 * e^{-\lambda * 1}}{2!} = \frac{\lambda^2 * e^{-\lambda}}{2!} * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^2 * e^{-\lambda}}{2!}$$

$$P(B_{111}) = P(N(0, 1] = 1) * P(N(1, 2] = 1) * P(N(2, 3] = 1) = \lambda e^{-\lambda} * \lambda e^{-\lambda} * \lambda e^{-\lambda} = (\lambda e^{-\lambda})^3$$

$$\text{Άρα } P(A) = P(B_{020}) + P(B_{202}) + P(B_{111}) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^2 * e^{-\lambda}}{2!} * e^{-\lambda} + (\lambda e^{-\lambda})^3 + \frac{\lambda^2 * e^{-\lambda}}{2!} * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^2 * e^{-\lambda}}{2!} = \left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^3 + \frac{\lambda^4}{4}\right) e^{-3\lambda}$$

$$\gamma') \text{ Ψάχνουμε την δεσμευμένη πιθανότητα } P(N(1,2] = 2|A) = \frac{P(\{N(1,2]=2\} \cap A)}{P(A)}$$

Για να ισχύει το A και το $N(1,2]=2$, πρέπει και οι 2 αφίξεις να γίνουν στο διάστημα (1,2] και καμία στα διαστήματα (0,1] και (2,3].

$$\text{Άρα } P(\{N(1,2] = 2\} \cap A) = P(B_{020})$$

$$P(N(1,2] = 2|A) = \frac{P(\{N(1,2]=2\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_{020})}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda} * \frac{\lambda^2 * e^{-\lambda}}{2!} * e^{-\lambda}}{(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^3 + \frac{\lambda^4}{4}) e^{-3\lambda}}$$

Άσκηση 2

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο ανά σελίδα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Ένα βιβλίο με 200 σελίδες έχει 40 τυπογραφικά λάθη.

- α') Αν επιλέξουμε 10 σελίδες από το παραπάνω βιβλίο, να βρεθεί η πιθανότητα να μην έχουν τυπογραφικά λάθη.
- β') Ποιος θα είναι ο αναμενόμενος αριθμός 10σέλιδων από το παραπάνω βιβλίο, που δεν θα έχουν κανένα τυπογραφικό λάθος;
- γ') Ποια η πιθανότητα μία τυχαία σελίδα του βιβλίου να περιέχει n λάθη; Ποιά είναι η πιθανότητα από 10 σελίδες τυχαία επιλεγμένες να υπάρχουν ακριβώς 3 χωρίς λάθος;

Λύση

- α') Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία μετράει τα τυπογραφικά λάθη ανά 10 σελίδες. Γνωρίζουμε ότι η τ.μ $X \sim P(\lambda)$, όπου λ είναι ο M.O. των λαθών ανά 10 σελίδες, δηλαδή

$$\lambda = \frac{40 * 10}{200} = 2$$

$$\text{Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι } P(X = 0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} = 0.135$$

- β') Διαθέτουμε $n = 20$ 10σέλιδα, οπότε ο αναμενόμενος αριθμός (μέση τιμή) θα είναι :

$$np = 20 * 0.135 = 2.7$$

- γ') Σε μία σελίδα του βιβλίου υπάρχουν κατά μέσο όρο $\frac{40}{200} = 0.2$ λάθη, δηλαδή ο αριθμός Y των λαθών σε μία σελίδα ακολουθεί κατανομή Poisson με $\lambda = 0.2$.
Άρα η πιθανότητα να υπάρχουν n λάθη σε μία σελίδα είναι:

$$P(Y = n) = e^{-0.2} \frac{0.2^n}{n!}$$

Η πιθανότητα να υπάρχουν 0 λάθη σε μία σελίδα είναι:

$$P(Y = 0) = e^{-0.2} \frac{0.2^0}{0!} = e^{-0.2}$$

Αν τώρα έχουμε δέκα σελίδες, η πιθανότητα να έχουν ακριβώς τρεις από αυτές 0 λάθη είναι:

$$\binom{10}{3} (e^{-0.2})^3 (1 - e^{-0.2})^7$$

Άσκηση 3.

Η εφαρμογή μίας βάσης δεδομένων σε ένα υπολογιστικό νέφος προσπελαύνεται κατά μέσο όρο από 15 πελάτες ανά λεπτό. Μοντελοποιούμε τις προσβάσεις σύμφωνα με μία Poisson στοχαστική διαδικασία. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι κατά τη διάρκεια ενός λεπτού, 3 πελάτες προσπελαύνουν την εφαρμογή τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα και 2 πελάτες προσπελαύνουν την εφαρμογή τα τελευταία 15 δευτερόλεπτα.

Λύση.

Εδώ ψάχνουμε το πλήθος των πελατών $N(t_1, t_2)$ που προσπελαύνουν την εφαρμογή στη διάρκεια $t_2 - t_1$ δευτερολέπτων. Ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda\tau = \frac{15}{60}(t_2 - t_1) = \frac{(t_2 - t_1)}{4}$.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(N[0, 10] = 3, N[45, 60] = 2) &= P(N[0, 10] = 3) \cdot P(N[45, 60] = 2) \quad (\text{ανεξάρτητα γεγονότα}) \\ &= \frac{(\lambda\tau_1)^{k_1} \cdot e^{-\lambda\tau_1}}{k_1!} \cdot \frac{(\lambda\tau_2)^{k_2} \cdot e^{-\lambda\tau_2}}{k_2!} \\ &= \frac{(\frac{10}{4})^3 \cdot e^{(-\frac{10}{4})}}{3!} \cdot \frac{(\frac{15}{4})^2 \cdot e^{(-\frac{15}{4})}}{2!} \\ &= 0.0353 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Χρησιμοποιούμε λαμπτήρες για να φωτίσουμε ένα δωμάτιο, ξεκινώντας την στιγμή $t = 0$. Οι λαμπτήρες αντικαθίστανται αμέσως μετά την εξάντληση της διάρκειας ζωής τους. Κάθε νέος λαμπτήρας επιλέγεται ανεξάρτητα, με ίση πιθανότητα μεταξύ ενός λαμπτήρα τύπου A και ενός λαμπτήρα τύπου B. Ο χρόνος ζωής X οποιουδήποτε λαμπτήρα, οποιουδήποτε τύπου, είναι μία τυχαία ανεξάρτητη μεταβλητή.

$$\text{Για τους λαμπτήρες τύπου A: } f_x(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\text{Για τους λαμπτήρες τύπου B: } f_x(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- α') Να βρείτε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.
- β') Να βρείτε την πιθανότητα να μην καεί κανένας λαμπτήρας πριν την στιγμή t .
- γ') Δεδομένου ότι δεν έχει καεί κανένας λαμπτήρας μέχρι την στιγμή t , ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος λαμπτήρας που χρησιμοποιείται να είναι τύπου A;
- δ') Να βρείτε τη διακύμανση του χρόνου μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.
- ε') Να βρείτε την πιθανότητα η εξάντληση ζωής του 12ου λαμπτήρα να είναι επίσης η 4η εξάντληση ζωής λαμπτήρα τύπου A.

- ϛ') Υποθέστε ότι η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν ακριβώς 12 λαμπτήρες καούν. Βρείτε την αναμενόμενη τιμή και τη διακύμανση της συνολικής περιόδου φωτισμού από λαμπτήρες τύπου B, όσο η διαδικασία βρίσκεται σε εξέλιξη.

Λύση

- α') Έστω X ο χρόνος μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.
Έστω A το γεγονός ο πρώτος λαμπτήρας να είναι τύπου A και B το γεγονός ο πρώτος λαμπτήρας να είναι τύπου B.
Οι δύο τύποι λαμπτήρων έχουν ίση πιθανότητα, οπότε:

$$E[X] = E[X|A]P(A) + E[X|B]P(B) = 1 * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

- β') Έστω D το γεγονός να μην καεί κανένας λαμπτήρας πριν την στιγμή t . Έχουμε:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

- γ') Ψάχνουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|D)$.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-t}}{\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}} = \frac{1}{1+e^{-2t}}$$

- δ') Αρχικά βρίσκουμε το $E[X^2]$. Ισχύει ότι η δεύτερη στιγμή μίας εκθετικής μεταβλητής T με παράμετρο λ είναι $E[T^2] = E[T]^2 + \text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

$$E[X^2] = E[X^2|A]P(A) + E[X^2|B]P(B) = 2\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

Από το ερώτημα (α) ξέρουμε ότι $E[X] = \frac{2}{3}$. Επομένως:

$$\text{var}(x) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{10}{9} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{2}{3}$$

- ε') Αυτή είναι η πιθανότητα από τις πρώτες 11 λάμπες οι 3 να είναι τύπου A και η 12η να είναι επίσης τύπου A.

$$\binom{11}{3} \binom{1}{2}^{12}$$

- ϛ') Θεωρούμε V το συνολικό χρονικό διάστημα φωτισμού από λάμπες τύπου B.
Έστω N ο αριθμός των λαμπτήρων που είναι τύπου B, από τις 12 συνολικές.
Έστω X_i η χρονική περίοδος φωτισμού από την i -οστή λάμπα τύπου B.
Έχουμε: $V = Y_1 + \dots + Y_N$. Το N είναι μία δυωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $n = 12$ και $p = \frac{1}{2}$. Οπότε:

$$E[N] = 6 \text{ var}(N) = 12\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 3$$

Επιπλέον $E[X_i] = \frac{1}{3}, \text{var}(X_i) = \frac{1}{9}$. Επομένως:

$$E[V] = E[N]E[X_i] = 2$$

$$\text{var}(V) = \text{var}(X_i)E[N] + E[X_i]^2\text{var}(N) = \frac{1}{9}6 + \frac{1}{9}3 = 1$$

Άσκηση 5

Θεωρήστε δύο ανεξάρτητες σ.δ. Poisson $\{N_t\}$ και $\{M_t\}$ με αριθμούς αφίξεων α και β , αντίστοιχα.

- α') Ποια η πιθανότητα η πρώτη άφιξη να προέρχεται από τη σ.δ. $\{N_t\}$;
- β') Ποια η πιθανότητα οι επόμενες 3 αφίξεις να προέρχονται από την ίδια σ.δ., δηλαδή να είναι όλες είτε από την σ.δ. $\{N_t\}$ είτε από την σ.δ. $\{M_t\}$;
- γ') Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού N των αφίξεων της πρώτης σ.δ. που συμβαίνουν πριν από την τέταρτη άφιξη της δεύτερης σ.δ.;

Λύση

- α') Οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων κατανέμονται εκθετικά. Δηλαδή $Tn \sim \alpha e^{-\alpha t}$ και $Tm \sim \beta e^{-\beta t}$ όπου Tn είναι ο χρόνος της πρώτης άφιξης της $\{N_t\}$ διαδικασίας και Tm είναι ο χρόνος της πρώτης άφιξης της $\{M_t\}$ διαδικασίας.
Οπότε:

$$P(T1 < T2) = \int_0^\infty P(T2 > T1 | T1 = t) \alpha e^{-\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-\beta t} \alpha e^{-\alpha t} dt = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

- β') Όταν μία άφιξη συμβαίνει, αυτή προέρχεται από την πρώτη Poisson διαδικασία με πιθανότητα ίση με $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ ενώ το γεγονός μίας άφιξης είναι ανεξάρτητο από την μία άφιξη στην επόμενη. Συνεπώς, η πιθανότητα ότι και οι τρεις αφίξεις προέρχονται από την ίδια διαδικασία είναι ίση με:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^3$$

- γ') Η πιθανότητα ότι η $N = n$ είναι η πιθανότητα ότι από τις πρώτες $n+3$ αφίξεις, οι n προέρχονται από την πρώτη διαδικασία και η $(n+4)$ άφιξη προέρχεται από την δεύτερη διαδικασία. Συνεπώς:

$$p_N(n) = \binom{n+3}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^4 \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^4, n = 0, 1, \dots$$