ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 5

Άσκηση 1

Μία αλυσίδα Markov με 6 καταστάσεις $\{S_0, S_1, \ldots, S_5\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο *Πίνακα Πιθανοτήτων Μετάβασης*:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Να σχεδιάσετε το γράφημα της αλυσίδας.

(ii) Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση S_0, να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι:

(α΄) Το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά την χρονική στιγμή k.

(β΄) Το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την S_4.

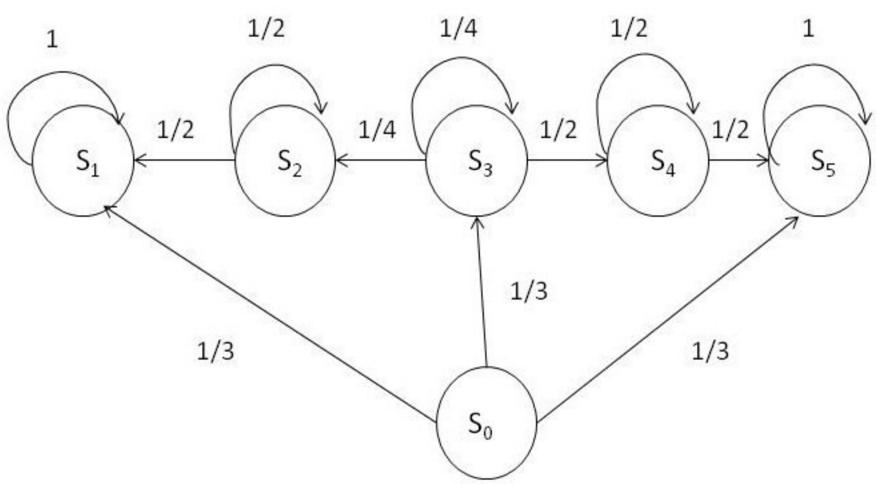
(γ΄) Το σύστημα επισκέπτεται την S_2 και κατόπιν την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή.

(δ΄) Το σύστημα επισκέπτεται την S_1 για πρώτη φορά σε χρόνο $n = 3$.

(ε΄) Το σύστημα βρίσκεται στην S_3 αμέσως μετά την n-στή χρονική στιγμή.

Λύση

(i) Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1(i).

(ii) Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση S_0, έχουμε:

(α΄) Έστω το γεγονός:

$$A_k : \{\text{Το σύστημα επισκέπτεται την } S_2 \text{ για πρώτη φορά την χρονική στιγμή } k\}$$

Ο μόνος τρόπος να συμβεί το A_k είναι το σύστημα να επισκεφτεί την S_3 την χρονική στιγμή 0, να μείνει εκεί τις επόμενες $k-2$ χρονικές στιγμές, και τελικά να επισκεφτεί την S_2 την χρονική στιγμή k.

Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A_k) = p_{03} \cdot p_{33}^{k-2} \cdot p_{32} = \Big(\frac{1}{3}\Big) \cdot \Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-2} \cdot \Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-1}, k = 2, 3, ...$$

(β΄) Έστω το γεγονός:

$$A : \{\text{Το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την } S_4\}$$

Υπάρχουν 3 τρόποι να συμβεί το A:

- Ο 1-ος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από την S_0 στην S_1 (με πιθανότητα μετάβασης $\frac{1}{3}$).
- Ο 2-ος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από την S_0 στην S_5 (με πιθανότητα μετάβασης $\frac{1}{3}$).
- Ο 3-ος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από την S_0 στην S_3, και ακολούθως στην S_2:
  - Η πιθανότητα μετάβασης από την S_0 στην S_3 είναι $\frac{1}{3}$.
  - Δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε η μετάβαση αυτή, η πιθανότητα μετάβασης από την S_3 την S_2 είναι $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.
  - Άρα, συνολικά, η μετάβαση από την S_0 στην S_3 και ακολούθως στην S_2 γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

(γ΄) Έστω το γεγονός:

$$B : \{\text{Το σύστημα επισκέπτεται την } S_2 \text{ και την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή}\}$$

Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P\Big(\{\text{Επίσκεψη στην } S_2\}\Big) \cdot P\Big(\{\text{Εγκατάλειψη της } S_2\} \mid \{\text{Βρίσκεται στην } S_2\}\Big) \\
&= \Big[\sum_{k=2}^{\infty} P(A_k)\Big] \cdot \frac{1}{2} \\
&= \Big[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{k-1}\Big] \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6}\Big[\sum_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{4})^{k-1}\Big] \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

(δ΄) Έστω το γεγονός:

$$\Gamma : \{\text{Το σύστημα επισκέπτεται την } S_1 \text{ για 1-η φορά σε χρόνο n=3}\}$$

Προκειμένου να συμβεί το γεγονός Γ, πρέπει να πραγματοποιηθούν διαδοχικά οι εξής μεταβάσεις:

$$S_0 \to S_3 \to S_2 \to S_1$$

Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(\Gamma) = p_{03} \cdot p_{32} \cdot p_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

(ε΄) Έστω το γεγονός:

$$\Delta : \{\text{Το σύστημα βρίσκεται στην } S_3 \text{ αμέσως μετά τη χρονική στιγμή n}\}$$

Προκειμένου να συμβεί το γεγονός Δ, θα πρέπει το σύστημα να επισκεφθεί την S_3 την χρονική στιγμή 1, και να παραμείνει εκεί για τις επόμενες $n-1$ χρονικές στιγμές.
Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(\Delta) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, n = 1, 2, 3, ...$$

Άσκηση 2

Μία αλυσίδα Markov με 7 καταστάσεις έχει *Πιθανότητες Μετάβασης* που προσδιορίζονται από τον εξής τύπο:

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0.5, & (i,j) = (3,2),(3,4),(5,6),(5,7) \\ 1, & (i,j) = (1,3),(2,1),(4,5),(6,7),(7,5) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω X_k η κατάσταση της αλυσίδας Markov την χρονική στιγμή k.

(i) Να σχεδιάσετε το γράφημα της αλυσίδας.

(ii) Για ποιες τιμές του n έχουμε θετικές πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5 (δηλαδή: $r_{15}(n) = P(X_n = 5/X_0 = 1) > 0$);

(iii) Να προσδιορίσετε το σύνολο $A(i)$ των καταστάσεων που είναι προσιτές από την κατάσταση i, για κάθε $i = 1,2,3,4,5,6,7$.

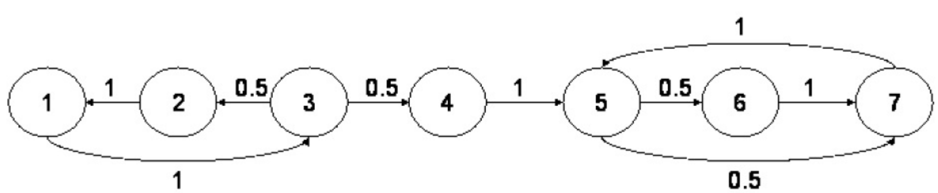
(iv) Να προσδιορίσετε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση, να αποφασίσετε αν είναι περιοδική (και με ποια τί) ή απεριοδική.

(v) Να προσδιορίσετε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας.

(vi) Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο αριθμό μεταβάσεων με μη-μηδενική πιθανότητα που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα, ώστε και οι 7 καταστάσεις να αποτελούν μια μοναδική κλάση επικοινωνίας.

Λύση

(i) Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 2:



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 2(i).

(ii) Το ζητούμενο μπορεί να μεταφραστεί και ως εξής: Με πόσους δυνατούς τρόπους και για ποιες τιμές του n, μπορούμε να μεταβούμε από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5;

Υπάρχουν 3 τρόποι να συμβεί το γεγονός της μετάβασης από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5:

- Ο 1-ος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5 μέσω τουλάχιστον 3 επιμέρους μεταβάσεων: $(1 \to 3 \to 4 \to 5)$.
- Ο 2-ος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5 μέσω <u>μονοπατιών με ανακύκλωση</u> από την κατάσταση 1 πίσω στην 1 <u>μεγέθους</u> 3: $(1 \to 3 \to 2 \to 1)$
- Ο 3-ος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5 μέσω <u>μονοπατιών με ανακύκλωση</u> από την κατάσταση 5 πίσω στην 5, μέσω της κατάστασης 7.

Τα μονοπάτια αυτά θα είναι είτε μεγέθους:

- 2: $(5 \to 7 \to 5)$
- 3: $(5 \to 6 \to 7 \to 5)$

Επομένως, τα δυνατά μεγέθη μονοπατιών είναι:

$$3 + 3k + 2m + 3n, k, m, n \geq 0$$

Άρα, τελικά:

$$r_{15} > 0, \quad \text{για } n = 3 \text{ ή } n \geq 5$$

(iii) Από τις καταστάσεις $i = 1, 2, 3$ υπάρχει ένα μονοπάτι μη-μηδενικής πιθανότητας, μέσω της κατάστασης 3, σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Οπότε, για τις εν λόγω καταστάσεις, το σύνολο των προσιτών καταστάσεων θα είναι:

- $i = 1: \quad A(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $i = 2: \quad A(2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $i = 3: \quad A(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Από τις καταστάσεις $i = 4, 5, 6, 7$ υπάρχουν μονοπάτια μη-μηδενικής πιθανότητας, μόνο προς τις καταστάσεις $5, 6, 7$. Οπότε, για τις εν λόγω καταστάσεις, το σύνολο των προσιτών καταστάσεων θα είναι:

- $i = 4: \quad A(4) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 5: \quad A(5) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 6: \quad A(6) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 7: \quad A(7) = \{5, 6, 7\}$

(iv) **Παρατήρηση:** Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι:

- *Έμμονες* καταστάσεις: Είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της κλάσης τους, αλλά όχι από καταστάσεις άλλων κλάσεων.
- *Μεταβατικές* καταστάσεις: Δεν είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας. 'Μεταβαίνουν' κάπου, και το σύστημα δε γυρίζει πίσω.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, έχουμε:

- Οι καταστάσεις $5, 6, 7$ είναι έμμονες, διότι μπορούμε να φτάσουμε σε αυτές από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση (είναι δηλαδή προσιτές από όλες τις καταστάσεις).
- Οι καταστάσεις $1, 2, 3, 4$ δεν είναι προσιτές από τις $5, 6, 7$, και ως εκ τούτου είναι μεταβατικές. Μόλις το σύστημα μεταβεί σε κάποια από τις καταστάσεις $5, 6, 7$ δεν μπορεί να επιστρέψει στις καταστάσεις $1, 2, 3, 4$.

Από την κατάσταση 5 το σύστημα επιστρέφει πίσω στην κατάσταση 5 με:

- 2 μεταβάσεις: $\quad (5 \to 7 \to 5)$
- 3 μεταβάσεις: $\quad (5 \to 6 \to 7 \to 5)$

Ως εκ τούτου, το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση 5 μετά από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 2$. Επομένως, το σύστημα είναι απεριοδικό.

(v) Οι καταστάσεις $5, 6, 7$ σχηματίζουν μια κλάση επικοινωνίας (επικοινωνούν όλες μεταξύ τους, αλλά καμία με τις εξωτερικές καταστάσεις).

Προσοχή: Οι καταστάσεις $1, 2, 3$ δεν αποτελούν κλάση επικοινωνίας, διότι οι καταστάσεις σε μια κλάση επικοινωνίας θα πρέπει να είναι έμμονες-και αυτές δεν είναι (π.χ. αν το σύστημα μεταβεί από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 4 δεν υπάρχει επιστροφή).

(vi) Για τη δημιουργία μίας μοναδικής κλάσης επικοινωνίας πρέπει να προστεθεί 1 μετάβαση: Για παράδειγμα, προσθέτοντας μια μετάβαση από την κατάσταση 5 στην κατάσταση 3 θα επιτρέπαμε τη μετάβαση σε κάθε κατάσταση από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση.

Γενικότερα: Οποιαδήποτε μετάβαση από την κλάση επικοινωνίας των $5, 6, 7$ σε κάποια από τις $1, 2, 3$ θα πετύχαινε τον ίδιο στόχο.

Άσκηση 3

Μία ομάδα ποδοσφαίρου χαρακτηρίζεται ως ¨ομάδα ψυχολογίας¨ όταν η απόδοσή της είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ηθικό των παικτών της: Το αποτέλεσμα ενός παιχνιδιού εξαρτάται από αυτό του προηγούμενου. Συγκεκριμένα, όταν η ομάδα κερδίζει ένα παιχνίδι, τότε είτε κερδίζει και το επόμενο με πιθανότητα 0.7, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3. Όταν φέρνει ισοπαλία, τότε είτε κερδίζει το επόμενο παιχνίδι με πιθανότητα 0.4, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3, είτε χάνει με πιθανότητα 0.3. Τέλος, όταν χάνει ένα παιχνίδι, τότε είτε χάνει και το επόμενο με πιθανότητα 0.5, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.4, είτε απογοητεύεται τελείως και σταματά να παίζει με πιθανότητα 0.1.

(i) Να ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, καθώς και την αλυσίδα Markov με το μικρότερο αριθμό καταστάσεων που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη των παιχνιδιών της ομάδας.

(ii) Να σχεδιάσετε το γράφημα της αλυσίδας.

(iii) Να προσδιορίστε τον *Πίνακα Πιθανοτήτων Μετάβασης*, που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη αλυσίδα Markov.

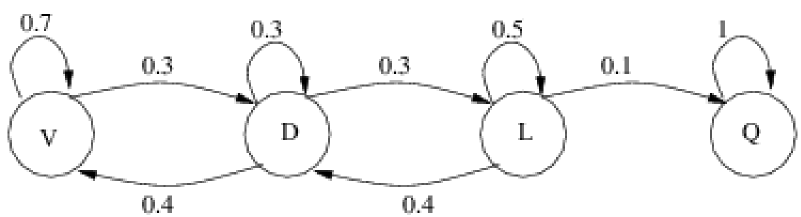
(iv) Να προσδιορίσετε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας.

(v) Αν το αποτέλεσμα του 1-ου παιχνιδιού είναι ισοπαλία, να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η ομάδα θα τα παρατήσει και θα σταματήσει να παίζει αμέσως μετά το 3-ο παιχνίδι. Να υπολογίστε την ίδια πιθανότητα, δεδομένου ότι η ομάδα κερδίζει στο 1-ο παιχνίδι. Τι παρατηρείτε;

Λύση

(i) Ορίζουμε τις εξής 4 καταστάσεις: $\{V$: νίκη, D : ισοπαλία, L : ήττα, Q : παραίτηση$\}$.

(ii) Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 3(ii).

(iii) Με βάση το γράφημα της αλυσίδας του σχήματος 3, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης θα είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iv) **Παρατήρηση:** Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι:

- *Έμμονες* καταστάσεις: Είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της κλάσης τους, αλλά όχι από καταστάσεις άλλων κλάσεων.
- *Μεταβατικές* καταστάσεις: Δεν είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας. 'Μεταβαίνουν' κάπου, και το σύστημα δε γυρίζει πίσω.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, έχουμε:

- Η κατάσταση Q είναι έμμονη, διότι μπορούμε να φτάσουμε σε αυτή από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση (είναι δηλαδή προσιτή από όλες τις καταστάσεις).
- Οι καταστάσεις V, D, L δεν είναι προσιτές από την κατάσταση Q, και ως εκ τούτου είναι μεταβατικές. Μόλις το σύστημα μεταβεί στην κατάσταση Q δεν μπορεί να επιστρέψει στις καταστάσεις V, D, L.

(v) Έστω X_n η κατάσταση της αλυσίδας Markov στο τέλος του $n-$οστού παιχνιδιού, και έστω το γεγονός:

$$A : \{\text{Η ομάδα τα παρατάει μετά το 3-ο παιχνίδι} \mid \text{Το 1-ο παιχνίδι είναι ισοπαλία}\}$$

Με χρήση του γραφήματος της αλυσίδας Markov στο Σχήμα 3, καθώς και των δεσμευμένων πιθανοτήτων, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P\Big(\{\text{3ο παιχνίδι είναι ήττα και η ομάδα τα παρατάει}\} \mid X_1 = D\Big) \\
&= P\Big(\{\text{3ο παιχνίδι είναι ήττα}\} \mid X_1 = D\Big) \cdot P(\{\text{Η ομάδα τα παρατάει}\} \mid X_3 = L) \\
&= P(X_3 = L \mid X_1 = D) \cdot P_{LQ} \\
&= \Big[P(X_3 = L, X_2 = L \mid X_1 = D) + P(X_3 = L, X_2 = D \mid X_1 = D) + \\
&\quad P(X_3 = L, X_2 = V \mid X_1 = D)\Big] \cdot P_{LQ} \\
&= \Big[P(X_3 = L \mid X_2 = L) \cdot P(X_2 = L \mid X_1 = D) + \\
&\quad P(X_3 = L \mid X_2 = D) \cdot P(X_2 = D \mid X_1 = D) + \\
&\quad P(X_3 = L \mid X_2 = V) \cdot P(X_2 = V \mid X_1 = D)\Big] \cdot P_{LQ} \\
&= (P_{LL} \cdot P_{DL} + P_{DL} \cdot P_{DD} + P_{VL} \cdot P_{DV}) \cdot P_{LQ} \\
&= (0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4) \cdot 0.1 = 0.024
\end{aligned}$$

Έστω το γεγονός:

$$B : \{\text{Η ομάδα τα παρατάει μετά το 3-ο παιχνίδι} \mid \text{Το 1-ο παιχνίδι είναι νικηφόρο}\}$$

Με χρήση του γραφήματος της αλυσίδας Markov στο Σχήμα 3, καθώς και των δεσμευμένων πιθανοτήτων, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P\Big(\{\text{3ο παιχνίδι είναι ήττα και η ομάδα τα παρατάει}\} \mid X_1 = V\Big) \\
&= P\Big(\{\text{3ο παιχνίδι είναι ήττα}\} \mid X_1 = V\Big) \cdot P(\{\text{Η ομάδα τα παρατάει}\} \mid X_3 = L) \\
&= P(X_3 = L \mid X_1 = V) \cdot P_{LQ} \\
&= \Big[P(X_3 = L, X_2 = L \mid X_1 = V) + P(X_3 = L, X_2 = D \mid X_1 = V) + \\
&\quad P(X_3 = L, X_2 = V \mid X_1 = V)\Big] \cdot P_{LQ} \\
&= \Big[P(X_3 = L \mid X_2 = L) \cdot P(X_2 = L \mid X_1 = V) + \\
&\quad P(X_3 = L \mid X_2 = D) \cdot P(X_2 = D \mid X_1 = V) + \\
&\quad P(X_3 = L \mid X_2 = V) \cdot P(X_2 = V \mid X_1 = V)\Big] \cdot P_{LQ} \\
&= (P_{LL} \cdot P_{VL} + P_{DL} \cdot P_{VD} + P_{VL} \cdot P_{VV}) \cdot P_{LQ} \\
&= (0.5 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.7) \cdot 0.1 = 0.009
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, στην περίπτωση που το 1-ο παιχνίδι είναι νικηφόρο αντί για ισοπαλία, η ομάδα τα παρατάει μετά το 3-ο παιχνίδι με πιθανότητα μικρότερη κάτα περίπου $2/3 = 66.66\%$ (για την ακρίβεια: $\frac{0.024-0.009}{0.024} = \frac{0.015}{0.024} = 0.625 = 62.5\%$).

Άσκηση 4

Μία αλυσίδα Markov περιγράφεται από τον ακόλουθο *Πίνακα Πιθανοτήτων Μετάβασης*:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(i) Να σχεδιάσετε το γράφημα της αλυσίδας.

(ii) Να προσδιορίσετε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας.

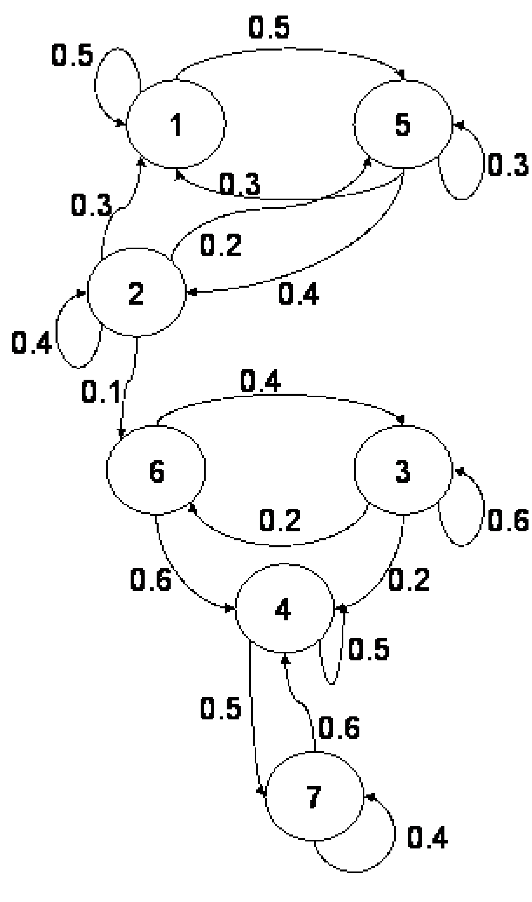
(iii) Να προσδιορίσετε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας.

(iv) Να υπολογίστε τα όρια: $\lim_{n\to\infty} p_{41}(n)$, $\lim_{n\to\infty} p_{66}(n)$

Λύση

Έστω $i, i = 1, 2, \ldots, 7$ οι καταστάσεις της αλυσίδας Markov.

(i) Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 4:



Σχήμα 4: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 4.

(ii) **Παρατήρηση:** Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι:

- *Έμμονες* καταστάσεις: Είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της κλάσης τους, αλλά όχι από καταστάσεις άλλων κλάσεων.
- *Μεταβατικές* καταστάσεις: Δεν είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας. 'Μεταβαίνουν' κάπου, και το σύστημα δε γυρίζει πίσω.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, έχουμε:

- Οι καταστάσεις $4, 7$ είναι έμμονες, διότι μπορούμε να φτάσουμε σε αυτές από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση (είναι δηλαδή προσιτές από όλες τις καταστάσεις).
- Οι καταστάσεις $1, 2, 3, 5, 6$ δεν είναι προσιτές από τις $4, 7$, και ως εκ τούτου είναι μεταβατικές. Μόλις το σύστημα μεταβεί σε κάποια από τις καταστάσεις $4, 7$ δεν μπορεί να επιστρέψει στις καταστάσεις $1, 2, 3, 5, 6$.

(iii) Οι καταστάσεις $4, 7$ σχηματίζουν μια κλάση επικοινωνίας (επικοινωνούν μεταξύ τους, αλλά καμία με τις εξωτερικές καταστάσεις).

Προσοχή: Οι καταστάσεις $1, 2, 3, 5, 6$ δεν αποτελούν κλάση επικοινωνίας, διότι οι καταστάσεις σε μια κλάση επικοινωνίας θα πρέπει να είναι έμμονες-και αυτές δεν είναι (π.χ. αν το σύστημα μεταβεί από την κατάσταση 3 ή την κατάσταση 6 στην κατάσταση 4 δεν υπάρχει επιστροφή).

(iv) Για τον υπολογισμό των ζητούμενων ορίων, έχουμε:

- Εφόσον δεν μπορούμε να μεταβούμε στην κατάσταση 1 από την κατάσταση 4, θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} p_{41}(n) = 0$$

- Εφόσον η κατάσταση 6 είναι μεταβατική κατάσταση, θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} p_{66}(n) = 0$$