

Φροντιστήριο 7

Άσκηση 1

Στη Μαρία αρέσει να τζογάρει. Πηγαίνει λοιπόν στο Las Vegas και αρχίζει με 200 € στην τσέπη. Σε κάθε προσπάθεια μπορεί να ποντάρει είτε 100 είτε 200 € (αν έχει αρκετά λεφτά). Κερδίζει με πιθανότητα p . Στόχος της είναι να διπλασιάσει τα λεφτά της και να φύγει με 400 €. Σταματάει όταν επιτύχει το στόχο της ή όταν χάσει τα λεφτά της.

α') Όποτε η Μαρία έχει μόνο 100 €, προφανώς μπορεί να ποντάρει μόνο 100 €. Επίσης, ποντάρει 100 € όποτε έχει 300 €. Βοηθήστε την να αποφασίσει σε μία στρατηγική για το πόσα λεφτά να ποντάρει όταν έχει 200 €, ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να κερδίσει (δηλαδή να φύγει με τα 400 €). Με άλλα λόγια, όταν έχει 200 €, πρέπει να ποντάρει 100 ή 200 €.

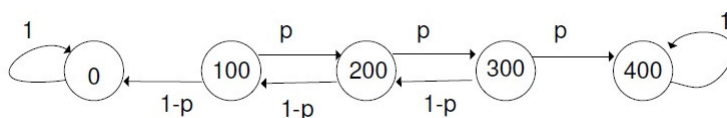
Βοήθεια : Αναλύστε τις περιπτώσεις για τις 2 στρατηγικές. Η περίπτωση που ποντάρει 200 € είναι εύκολη. Για την περίπτωση που ποντάρει 100 €, σχηματίστε το γράφημα της κατάλληλης αλυσίδας Markov.

β') Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών μέχρις ότου χάσει τα λεφτά της ή τα διπλασιάσει για $p = 0.75$ και ακολουθώντας τη βέλτιστη στρατηγική.

Λύση.

α') Αναλύουμε τις 2 στρατηγικές:

- 1η στρατηγική: Η Μαρία ποντάρει τα 200€ και είτε διπλασιάζει με πιθανότητα p και φεύγει, είτε χάνει με πιθανότητα $1 - p$ και φεύγει.
- 2η στρατηγική: Η Μαρία ποντάρει τα 100€ από τα 200€ που είχε αρχικά. Η αλυσίδα Markov δίδεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή αλυσίδα στην περίπτωση όπου η Μαρία αρχικά ποντάρει 100€.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η Μαρία τελικά να κερδίσει, δεδομένου ότι ξεκίνησε με 200€. Θέλουμε δηλαδή να καταλήξουμε στην έμμονη κατάσταση 400. Αυτή είναι μία κατάσταση απορροφήσεως (absorbing state).

Υπενθύμιση:

Γενικά για μια αλυσίδα Markov οι πιθανότητες απορροφήσεως α_i της αλυσίδας από την κατάσταση s , ξεκινώντας από την i είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned}\alpha_s &= 1 \\ \alpha_i &= 0, \quad \text{για κάθε κατάσταση απορροφήσεως } i \neq s \\ \alpha_j &= \sum_{i=1}^m p_{ij} \alpha_i, \quad \text{για κάθε μεταβατική κατάσταση } i\end{aligned}$$

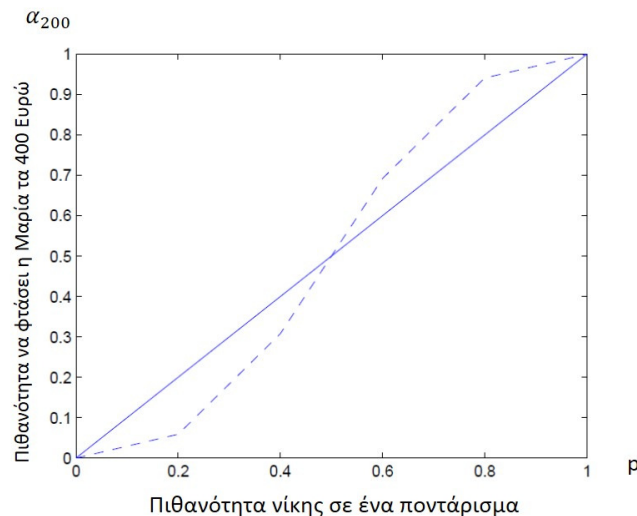
Εδώ, οι έμμονες καταστάσεις είναι οι 0 και 400. Θέλουμε το σύστημα να απορροφηθεί από την 400 (να κερδίσει η Μαρία), άρα:

$$\begin{aligned}\alpha_s &= 1, & \text{τελική κατάσταση } s = 400 \\ \alpha_i &= 0, & \text{κατάσταση απορροφήσεως } i = 0 \neq s \\ \alpha_{100} &= p_{100 \rightarrow 0} \cdot \alpha_0 + p_{100 \rightarrow 200} \cdot \alpha_{200} = (1-p) \cdot \alpha_0 + p \cdot \alpha_{200} = p \cdot \alpha_{200} \\ \alpha_{200} &= p_{200 \rightarrow 100} \cdot \alpha_{100} + p_{200 \rightarrow 300} \cdot \alpha_{300} = (1-p) \cdot \alpha_{100} + p \cdot \alpha_{300} \\ \alpha_{300} &= p_{300 \rightarrow 200} \cdot \alpha_{200} + p_{300 \rightarrow 400} \cdot \alpha_{400} = (1-p) \cdot \alpha_{200} + p \cdot 1\end{aligned}$$

Εξετάζουμε το ενδεχόμενο το σύστημα να απορροφηθεί από την κατάσταση $s = 400$, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την $i = 200$, δηλαδή μας ενδιαφέρει η α_{200} . Λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς α_{200} και έχουμε:

$$\alpha_{200} = \frac{p^2}{1 - 2p + 2p^2}$$

Στην πρώτη στρατηγική, όπως είπαμε, η Μαρία κερδίζει με πιθανότητα p , ενώ στη δεύτερη με πιθανότητα α_{200} , άρα θα πρέπει να συγκρίνουμε τις δύο αυτές πιθανότητες για να δούμε ποια υπερσχύει, Σχήμα 2:



Σχήμα 2: Η συνεχόμενη γραμμή εκφράζει την πρώτη στρατηγική (ποντάρω όσα χρήματα έχω), ενώ η διακεκομμένη τη δεύτερη στρατηγική (ποντάρω 100€, ενώ έχω 200).

Από το διάγραμμα μπορούμε να δούμε ότι η πρώτη στρατηγική είναι προτιμότερη όταν $p < \frac{1}{2}$, ενώ η δεύτερη είναι προτιμότερη όταν $p > \frac{1}{2}$. Για $p = \frac{1}{2}$ οι δύο στρατηγικές δε διαφοροποιούνται.

β') Υπενθύμιση:

Μέσοι χρόνοι απορροφήσεως μ_i ξεκινώντας από την κατάσταση i είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned}\mu_i &= 0, & \text{για κάθε έμμονη κατάσταση } i \\ \mu_i &= 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} \mu_j, & \text{για κάθε μεταβατική κατάσταση } i\end{aligned}$$

Εδώ, έστω μ_i ο μέσος αριθμός προσπαθειών που ζητούμε, ξεκινώντας από την κατάσταση i . Έχουμε,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \mu_{400} = 0 \quad (\acute{\epsilon}\mu\mu\omicron\upsilon\upsilon\epsilon\varsigma \kappa\alpha\tau\alpha\sigma\tau\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota\varsigma) \\ \mu_{100} &= 1 + p_{100 \rightarrow 0} \cdot \mu_0 + p_{100 \rightarrow 200} \cdot \mu_{200} = 1 + p \cdot \mu_{200} \\ \mu_{200} &= 1 + p_{200 \rightarrow 100} \cdot \mu_{100} + p_{200 \rightarrow 300} \cdot \mu_{300} = 1 + (1-p) \cdot \mu_{100} + p \cdot \mu_{300} \\ \mu_{300} &= 1 + p_{300 \rightarrow 200} \cdot \mu_{200} + p_{300 \rightarrow 400} \cdot \mu_{400} = 1 + (1-p) \cdot \mu_{200}\end{aligned}$$

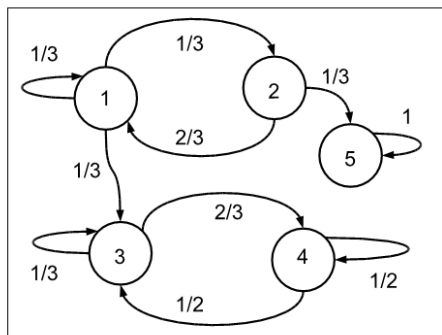
Άρα, για $p = 0.75$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\mu_{100} &= 3.4, & \text{μέσος αριθμός προσπαθειών μέχρι να χάσει ή να διπλασιάσει} & \mid \text{ξεκίνησε με } 100\text{€} \\ \mu_{200} &= 3.2, & \text{μέσος αριθμός προσπαθειών μέχρι να χάσει ή να διπλασιάσει} & \mid \text{ξεκίνησε με } 200\text{€} \\ \mu_{300} &= 1.8, & \text{μέσος αριθμός προσπαθειών μέχρι να χάσει ή να διπλασιάσει} & \mid \text{ξεκίνησε με } 300\text{€}\end{aligned}$$

Ο μέσος αριθμός προσπαθειών που μας ζητείται είναι ο $\mu_{200} = 3.2$.

Άσκηση 2.

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα που φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Μαρκοβιανή αλυσίδα για την Άσκηση 2.

- α') Ποιες είναι οι έμμονες και μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας; Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και αν είναι περιοδικές ή όχι.
- β') Υπάρχουν οι οριακές (στατικές) πιθανότητες δεδομένου ότι η αλυσίδα αρχίζει στην κατάσταση 3 ($X_0 = 3$); Ποιες είναι αυτές;
- γ') Ορίζουμε το χρόνο T ως το πρώτο n για το οποίο ισχύει ότι $X_n \in \{3, 4, 5\}$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_T = 5/X_0 = 1)$.
- δ') Όσο η κατάσταση του συστήματος είναι η 1 ή η 2, λαμβάνουμε τόσα ευρώ όσα η τωρινή κατάσταση. Έστω v_i το αναμενόμενο ποσό που λαμβάνουμε όταν η αρχική κατάσταση είναι η i ($i = 1, 2$). Γράψτε το σύστημα των εξισώσεων που θα σας επιτρέψουν να υπολογίσετε τα v_1 και v_2 . Ποιο είναι το μέσο κέρδος σας για κάθε μία από τις αρχικές καταστάσεις 1 και 2;

Λύση.

α') Παρατηρούμε το γράφημα και βλέπουμε ότι η αλυσίδα έχει δύο μεταβατικές καταστάσεις τις 1 και 2 και τρεις έμμονες, τις 3, 4 και 5. Οι 3, 4 αποτελούν μια επαναληπτική κλάση, ενώ η 5 από μόνη της μια άλλη κλάση. Δεν υπάρχουν περιοδικές καταστάσεις.

β') Λύνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για την κλάση 3, 4:

$$\begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4.$$

Μαζί με την $\pi_3 + \pi_4 = 1$, παίρνουμε ότι $\pi_3 = \frac{3}{7}$ και $\pi_4 = \frac{4}{7}$.

γ') Η $P(X_T = 5 | X_0 = 1)$ είναι πολύ απλά η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την κατάσταση $s = 5$ ξεκινώντας από την $i = 1$. Οι πιθανότητες απορρόφησης ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= 1, & \text{Τελική κατάσταση} \\ \alpha_3 &= \alpha_4 = 0, & \text{Άλλες καταστάσεις απορροφήσεως} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{3} \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} \cdot \alpha_2 + \frac{1}{3} \cdot \alpha_3 \\ \alpha_2 &= \frac{2}{3} \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3} \cdot \alpha_5 \end{aligned}$$

Λύνοντας, παίρνουμε: $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Συνεπώς, $P(X_T = 5 | X_0 = 1) = \alpha_1 = \frac{1}{4}$.

δ') Προφανώς, το αναμενόμενο κέρδος εξαρτάται από το μέσο χρόνο έως την απορρόφηση του συστήματος (ξεκινώντας από τις 1 ή 2):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \mu_1 + \frac{1}{3} \cdot \mu_2 : & \text{Μέσο \# μεταβάσεων έως την απορρόφηση ξεκινώντας από την 1.} \\ \mu_2 &= 1 + \frac{2}{3} \cdot \mu_1 : & \text{Μέσο \# μεταβάσεων έως την απορρόφηση ξεκινώντας από τη 2.} \end{aligned}$$

Αλλά κερδίζουμε 1€ για κάθε μετάβαση στην 1 και 2€ για κάθε μετάβαση στη 2. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + \frac{1}{3} \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 \\ v_2 &= 2 + \frac{2}{3} \cdot v_1 \end{aligned}$$

άρα λύνοντας έχουμε $v_1 = 3.75\text{€}$ και $v_2 = 4.5\text{€}$.

Άσκηση 3.

Ένα πειραματικό ποντίκι είναι φυλακισμένο μέσα σε ένα κλουβί με τρεις πόρτες. Σε κάθε γύρο, το ποντίκι ανοίγει τυχαία μία πόρτα και τρώει ένα κομμάτι τυρί, εάν υπάρχει τέτοιο πίσω από την πόρτα που άνοιξε. Κάθε πόρτα επιλέγεται με ίση πιθανότητα σε κάθε γύρο, ανεξάρτητα από το που το ποντίκι βρήκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Αν δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί σε αυτόν τον γύρο είναι $\frac{3}{4}$. Αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και η ίδια πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 0. Ενώ αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και διαφορετική πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 1.

- α') Μας ενδιαφέρει το αν το ποντίκι τρώει το τυρί του σε κάθε γύρο. Ορίστε τη Μαρχοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του πειράματος. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.
- β') Αν παρατηρήσετε το ποντίκι για 1000 γύρους, σε ποιο ποσοστό αυτών θα το δείτε να τρώει το τυρί του;
- γ') Έστω ότι δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει ένα κομμάτι τυρί;
- δ') Έστω ότι δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει n κομμάτια τυρί;

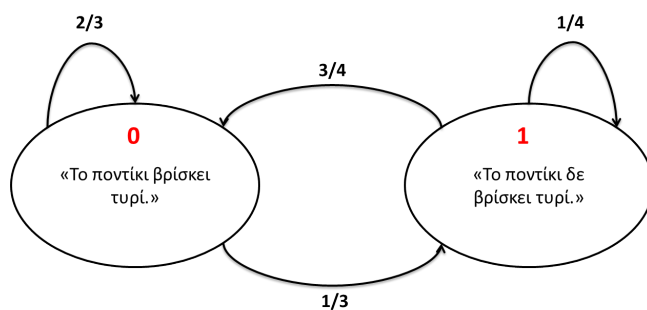
Βοήθεια: Στα ερωτήματα (γ') και (δ') χρησιμοποιείτε τις γνώσεις σας σχετικά με μέσους χρόνους ως την πρώτη επίσκεψη και μέσο χρόνο επανόδου, αντίστοιχα.

- ε') Κοιτάτε μέσα στο κλουβί και παρατηρείτε ότι το ποντίκι τρώει ένα κομμάτι τυρί πίσω από την πόρτα 1. Ποια είναι η πιθανότητα ότι 3 γύρους μετά, το ποντίκι θα βρεθεί να τρώει πάλι πίσω από την πόρτα 1;

Βοήθεια: Στο ερώτημα (ε'), χρειάζεται να ορίσετε μία νέα Μαρχοβιανή αλυσίδα που να περιγράφει και τις πόρτες πίσω από τις οποίες το ποντίκι βρίσκει τυρί.

Λύση.

- α') Εφόσον μας ενδιαφέρει αν το ποντίκι τρώει το τυρί του, ορίζουμε μία αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 3, Ερώτημα α'.

Ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Εξήγηση επιμέρους πιθανοτήτων:

- $P(\Theta \text{α βρει} \mid \Delta \text{ε βρήκε πριν}) = \frac{3}{4}$ (δίδεται από την εκφώνηση)
- $P(\Delta \text{ε θα βρει} \mid \Delta \text{ε βρήκε πριν}) = 1 - P(\Theta \text{α βρει} \mid \Delta \text{ε βρήκε πριν}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
- $P(\Theta \text{α βρει} \mid \text{Βρήκε πριν}) = P(\text{Να επιλέξει διαφορετική πόρτα από αυτήν του προηγούμενου γύρου}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
- $P(\Delta \text{ε θα βρει} \mid \text{Βρήκε πριν}) = P(\text{Να επιλέξει την ίδια πόρτα με αυτήν του προηγούμενου γύρου}) = \frac{1}{3}$.

- β') Για να βρούμε σε πόσους από τους 1000 γύρους το ποντίκι τρώει το τυρί, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.
Οι εξισώσεις ισοροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 \\ \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_1 \end{aligned}$$

που σε συνδυασμό με την $\pi_0 + \pi_1 = 1$ μας δίνει $\pi_0 = \frac{9}{13} = 0.692$ και $\pi_1 = \frac{4}{13}$.

Άρα σε κάποιο συγκεκριμένο γύρο στο μακρινό μέλλον, το ποντίκι θα τρώει τυρί με πιθανότητα 0.692 και αν παρατηρήσουμε το ποντίκι για 1000 γύρους, θα τρώει το τυρί στους $1000 \times 0.692 = 692$ από αυτούς.

- γ') Μας ζητείται ο μέσος χρόνος ως την πρώτη επίσκεψη της κατάστασης 0, ξεκινώντας από την κατάσταση 1.

Σχετική θεωρία:

Ο μέσος αριθμός των βημάτων ή αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πρώτη διέλευση του συστήματος από μία συγκεκριμένη έμμονη κατάσταση s , ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση i , είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} t_s &= 0 \\ t_i &= 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij}t_j, \quad \text{για κάθε } i \neq s \end{aligned}$$

Άρα, εδώ:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, s = 0 \quad (\text{η έμμονη κατάσταση για την οποία ψάχνουμε την 1η διέλευση}) \\ t_1 &= 1 + p_{10} \cdot t_0 + p_{11} \cdot t_1 = 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{4}{3} = 1.33 \end{aligned}$$

- δ') Εδώ, μας ζητείται ο αναμενόμενος χρόνος T , μέχρι την πρώτη διέλευση του συστήματος από την κατάσταση 0, ακολουθούμενος από $(n-1)$ επανόδους στην κατάσταση 0, ξεκινώντας από τη 0, δηλαδή:

$$T = t_1 + (n-1) \cdot t_0^*$$

Σχετική θεωρία:

Ο μέσος χρόνος επανάληψης της κατάστασης s , ορίζεται ως:

$$t_s^* = E[\text{αριθμός μεταβάσεων μέχρι την πρώτη επιστροφή στην } s, \text{ ξεκινώντας από την } s]$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το t_s^* , αν γνωρίζουμε τους χρόνους της 1ης επίσκεψης t_i , χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$t_s^* = 1 + \sum_{j=1}^m p_{sj}t_j$$

Εδώ, γνωρίζουμε από το ερώτημα (γ') ότι $t_0 = 0$ και $t_1 = \frac{4}{3}$.
Έχουμε λοιπόν:

$$t_0^* = 1 + p_{01} \cdot t_1 + p_{00} \cdot t_0 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 0 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{9}.$$

Συνεπώς,

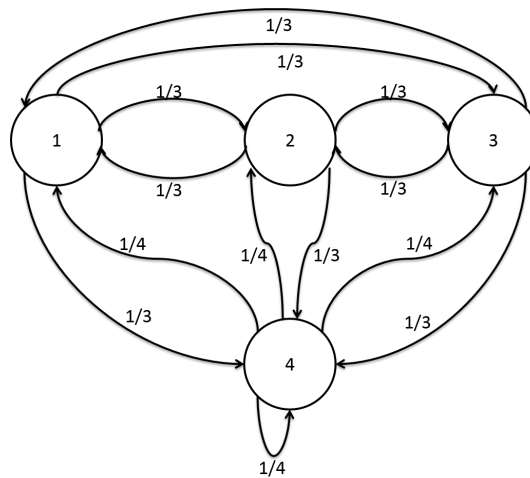
$$T = \frac{4}{3} + (n-1) \cdot \frac{13}{9}$$

ε') Εδώ, μας ενδιαφέρει πίσω από ποια πόρτα βρίσκει το ποντίκι να φάει. Επομένως, ορίζουμε κατάλληλα τις εξής καταστάσεις:

Κατάσταση i : ' Το ποντίκι βρίσκει τυρί πίσω από την πόρτα $i = 1, 2, 3$ '.

Κατάσταση 4: ' Το ποντίκι δε βρίσκει τυρί '.

Η αντίστοιχη αλυσίδα Markov φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 3, Ερώτημα ε'.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Εξήγηση μεταβάσεων:

- Από κάθε πόρτα έχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$ να επιλέξει την ίδια πόρτα και να μη βρει τυρί. Για κάθε πόρτα διαφορετική της τωρινής, υπάρχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$ να επιλεγεί (και σίγουρα πίσω της θα υπάρχει τυρί).
- $P(\text{Δε θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = \frac{1}{4}$ (από την εκφώνηση).
- $P(\text{Θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = 1 - P(\text{Δε θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ($\frac{1}{4}$ για κάθε πόρτα).

Υπάρχουν 7 διαδρομές μήκους 3 που ξεκινούν και καταλήγουν στην κατάσταση 1:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{27}$
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{27}$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{48}$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$2 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{48} = 0.206.$$