

Θέμα 1 - 30 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Ένας αυτοκινητιστής περνά 4 φανάρια και καθένα από αυτά είναι κόκκινο με πιθανότητα $p = 1/2$. Οι χρόνοι αναμονής, X_i , στα φανάρια όπου τον πιάνει το κόκκινο είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 1 λεπτό. Έστω Y ο συνολικός χρόνος αναμονής στα φανάρια.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .

(γ) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Λύση

Καθώς κάθε φανάρι το βρίσκει κόκκινο με $p = 1/2$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, το πλήθος, N , των φαναριών που βρίσκει ακολουθεί διωνυμική κατανομή: $N \sim \Delta(n = 4, p = \frac{1}{2})$.

$$P_N(k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$E[N] = np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad \text{var}(N) = np(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$M_N(s) = (1-p+pe^s)^n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^s\right)^4 = \frac{(1+e^s)^4}{2^4}$$

Επίσης,

$$X_i \sim \exp(\lambda = 1)$$

$$P_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$E[X_i] = 1/\lambda = 1, \quad \text{var}(X_i) = 1/\lambda^2 = 1$$

$$M_{X_i}(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s} = \frac{1}{1 - s}.$$

(α) Ο συνολικός χρόνος αναμονής, Y , είναι το άθροισμα ενός διωνυμικά κατανεμημένου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ. $X_1, X_2, \dots$ που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Συνεπώς,

$$E[Y] = E[N]E[X] = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(X)E[N] + \text{var}(N)(E[X])^2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1^2 = 3.$$

(β)

$$M_Y(s) = M_N(s)|_{e^s=M_X(s)} = \frac{(1+M_X(s))^4}{2^4} = \frac{(1+\frac{1}{1-s})^4}{2^4} = \frac{1}{2^4} \left(\frac{2-s}{1-s}\right)^4.$$

(γ)

$$M'_Y(s) = \frac{1}{2^4} 4(1 + M_X(s))^3 M'_X(s) = \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M'_X(s)$$

Επομένως,

$$E[Y] = M'_Y(s)|_{s=0} = \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M'_X(0) = \frac{1}{4} (1 + 1)^3 \cdot E[X] = \frac{8}{4} \cdot 1 = 2 .$$

$$M''_Y(s) = \frac{1}{4} 3(1 + M_X(s))^2 (M'_X(s))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M''_X(s)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= M''_Y(s)|_{s=0} = \frac{3}{4} (1 + M_X(0))^2 (M'_X(0))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M''_X(0) \\ &= \frac{3}{4} (1 + 1)^2 (E[X])^2 + \frac{1}{4} (1 + 1)^3 E[X^2] \\ &= 3 \cdot 1^2 + 2(\text{var}(X) + (E[X])^2) \\ &= 3 + 2(1 + 1) = 7 . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 7 - 2^2 = 3 .$$

Θέμα 1 - 30 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Ένας αυτοκινητιστής περνά 8 φανάρια και καθένα από αυτά είναι κόκκινο με πιθανότητα $p = 1/4$. Οι χρόνοι αναμονής, X_i , στα φανάρια όπου τον πιάνει το κόκκινο είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 2 λεπτά. Έστω Y ο συνολικός χρόνος αναμονής στα φανάρια.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .

(γ) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Λύση

Καθώς κάθε φανάρι το βρίσκει κόκκινο με $p = 1/4$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, το πλήθος, N , των φαναριών που βρίσκει ακολουθεί διωνυμική κατανομή: $N \sim \Delta(n = 8, p = \frac{1}{4})$.

$$P_N(k) = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{8-k} = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^8 3^{8-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 8.$$

$$E[N] = np = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2, \quad \text{var}(N) = np(1-p) = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$M_N(s) = (1-p+pe^s)^n = \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^s\right)^8 = \frac{(3+e^s)^8}{4^8}$$

Επίσης,

$$X_i \sim \exp(\lambda = \frac{1}{2})$$

$$P_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x \geq 0.$$

$$E[X_i] = 1/\lambda = 2, \quad \text{var}(X_i) = 1/\lambda^2 = 4$$

$$M_{X_i}(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s} = \frac{1}{1 - 2s}.$$

(α) Ο συνολικός χρόνος αναμονής, Y , είναι το άθροισμα ενός διωνυμικά κατανεμημένου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ. $X_1, X_2, \dots$ που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Συνεπώς,

$$E[Y] = E[N]E[X] = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(X)E[N] + \text{var}(N)(E[X])^2 = 4 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 = 14.$$

(β)

$$M_Y(s) = M_N(s)|_{e^s=M_X(s)} = \frac{(3+M_X(s))^8}{4^8} = \frac{(3+\frac{1}{1-2s})^8}{4^8} = \frac{1}{4^8} \left(\frac{4-2s}{1-2s}\right)^8.$$

(γ)

$$M'_Y(s) = \frac{1}{4^8} 8(3 + M_X(s))^7 M'_X(s) = \frac{8}{4^8} (3 + M_X(s))^7 M'_X(s)$$

Επομένως,

$$E[Y] = M'_Y(s)|_{s=0} = \frac{8}{4^8} (3 + M_X(0))^7 M'_X(0) = \frac{8}{4^8} (3 + 1)^7 \cdot E[X] = \frac{8 \cdot 4^7}{4^8} \cdot 2 = 4 .$$

$$M''_Y(s) = \frac{8}{4^8} 7(3 + M_X(s))^6 (M'_X(s))^2 + \frac{8}{4^8} (3 + M_X(s))^7 M''_X(s)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= M''_Y(s)|_{s=0} = \frac{56}{4^8} (3 + M_X(0))^6 (M'_X(0))^2 + \frac{8}{4^8} (3 + M_X(0))^7 M''_X(0) \\ &= \frac{56}{4^8} (3 + 1)^6 (E[X])^2 + \frac{8}{4^8} (3 + 1)^7 E[X^2] \\ &= \frac{56}{4^2} \cdot 2^2 + \frac{8}{4} (\text{var}(X) + (E[X])^2) \\ &= \frac{56}{4} + 2(4 + 4) \\ &= 14 + 16 = 30 . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 30 - 4^2 = 14 .$$

Θέμα 1 - 30 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Ένας αυτοκινητιστής περνά 4 φανάρια και καθένα από αυτά είναι κόκκινο με πιθανότητα $p = 1/2$. Οι χρόνοι αναμονής, X_i , στα φανάρια όπου τον πιάνει το κόκκινο είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 2]$ λεπτά. Έστω Y ο συνολικός χρόνος αναμονής στα φανάρια.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .

(γ) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Λύση

Καθώς κάθε φανάρι το βρίσκει κόκκινο με $p = 1/2$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, το πλήθος, N , των φαναριών που βρίσκει ακολουθεί διωνυμική κατανομή: $N \sim \Delta(n = 4, p = \frac{1}{2})$.

$$P_N(k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$E[N] = np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad \text{var}(N) = np(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$M_N(s) = (1-p+pe^s)^n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^s\right)^4 = \frac{(1+e^s)^4}{2^4}$$

Επίσης,

$$X_i \sim \text{unif}(0, 2)$$

$$P_{X_i}(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$E[X_i] = (a+b)/2 = 1, \quad \text{var}(X_i) = (b-a)^2/12 = 1/3$$

$$M_{X_i}(s) = \frac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s} = \frac{e^{2s} - 1}{2s}.$$

(α) Ο συνολικός χρόνος αναμονής, Y , είναι το άθροισμα ενός διωνυμικά κατανομημένου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ. $X_1, X_2, \dots$ που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή. Συνεπώς,

$$E[Y] = E[N]E[X] = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(X)E[N] + \text{var}(N)(E[X])^2 = \frac{1}{3} \cdot 2 + 1 \cdot 1^2 = \frac{5}{3}.$$

(β)

$$M_Y(s) = M_N(s)|_{e^s=M_X(s)} = \frac{(1+M_X(s))^4}{2^4} = \frac{(1+\frac{e^{2s}-1}{2s})^4}{2^4} = \frac{1}{2^4} \left(\frac{2s+e^{2s}-1}{2s} \right)^4.$$

(γ)

$$M'_Y(s) = \frac{1}{2^4} 4(1 + M_X(s))^3 M'_X(s) = \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M'_X(s)$$

Επομένως,

$$E[Y] = M'_Y(s)|_{s=0} = \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M'_X(0) = \frac{1}{4} (1 + 1)^3 \cdot E[X] = \frac{8}{4} \cdot 1 = 2 .$$

$$M''_Y(s) = \frac{1}{4} 3(1 + M_X(s))^2 (M'_X(s))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M''_X(s)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= M''_Y(s)|_{s=0} = \frac{3}{4} (1 + M_X(0))^2 (M'_X(0))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M''_X(0) \\ &= \frac{3}{4} (1 + 1)^2 (E[X])^2 + \frac{1}{4} (1 + 1)^3 E[X^2] \\ &= 3 \cdot 1^2 + 2(\text{var}(X) + (E[X])^2) \\ &= 3 + 2\left(\frac{1}{3} + 1\right) \\ &= 3 + 2\frac{4}{3} = \frac{17}{3} . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{17}{3} - 2^2 = \frac{5}{3} .$$

Θέμα 1 - 30 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Ένας αυτοκινητιστής περνά 8 φανάρια και καθένα από αυτά είναι κόκκινο με πιθανότητα $p = 1/4$. Οι χρόνοι αναμονής, X_i , στα φανάρια όπου τον πιάνει το κόκκινο είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 2]$ λεπτά. Έστω Y ο συνολικός χρόνος αναμονής στα φανάρια.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .

(γ) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Λύση

Καθώς κάθε φανάρι το βρίσκει κόκκινο με $p = 1/4$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, το πλήθος, N , των φαναριών που βρίσκει ακολουθεί διωνυμική κατανομή: $N \sim \Delta(n = 8, p = \frac{1}{4})$.

$$P_N(k) = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{8-k} = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^8 3^{8-k}, \quad n = 1, 2, \dots, 8.$$

$$E[N] = np = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2, \quad \text{var}(N) = np(1-p) = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$M_N(s) = (1-p+pe^s)^n = \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^s\right)^8 = \frac{(3+e^s)^8}{4^8}$$

Επίσης,

$$X_i \sim \text{unif}(0, 2)$$

$$P_{X_i}(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$E[X_i] = (a+b)/2 = 1, \quad \text{var}(X_i) = (b-a)^2/12 = 1/3$$

$$M_{X_i}(s) = \frac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s} = \frac{e^{2s} - 1}{2s}.$$

(α) Ο συνολικός χρόνος αναμονής, Y , είναι το άθροισμα ενός διωνυμικά κατανομημένου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ. $X_1, X_2, \dots$ που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Συνεπώς,

$$E[Y] = E[N]E[X] = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(X)E[N] + \text{var}(N)(E[X])^2 = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 = \frac{13}{6}.$$

(β)

$$M_Y(s) = M_N(s)|_{e^s=M_X(s)} = \frac{(3+M_X(s))^8}{4^8} = \frac{(3+\frac{e^{2s}-1}{2s})^8}{4^8} = \frac{1}{4^8} \left(\frac{6s+e^{2s}-1}{2s}\right)^8 = \frac{1}{8^8} \left(\frac{6s+e^{2s}-1}{s}\right)^8.$$

(γ)

$$M'_Y(s) = \frac{1}{4^8} 8(3 + M_X(s))^7 M'_X(s) = \frac{8}{4^8} (3 + M_X(s))^7 M'_X(s)$$

Επομένως,

$$E[Y] = M'_Y(s)|_{s=0} = \frac{8}{4^8} (3 + M_X(0))^7 M'_X(0) = \frac{8}{4^8} (3 + 1)^7 \cdot E[X] = \frac{8 \cdot 4^7}{4^8} \cdot 1 = 2 .$$

$$M''_Y(s) = \frac{8}{4^8} 7(3 + M_X(s))^6 (M'_X(s))^2 + \frac{8}{4^8} (3 + M_X(s))^7 M''_X(s)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= M''_Y(s)|_{s=0} = \frac{56}{4^8} (3 + M_X(0))^6 (M'_X(0))^2 + \frac{8}{4^8} (3 + M_X(0))^7 M''_X(0) \\ &= \frac{56}{4^8} (3 + 1)^6 (E[X])^2 + \frac{8}{4^8} (3 + 1)^7 E[X^2] \\ &= \frac{56}{4^2} \cdot 1^2 + \frac{8}{4} (\text{var}(X) + (E[X])^2) \\ &= \frac{7}{2} + 2\left(\frac{1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{7}{2} + \frac{8}{3} = \frac{37}{6} . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{37}{6} - 2^2 = \frac{13}{6} .$$