

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
9 Απριλίου 2021 - Διάρκεια: 1.5 Ωρες

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Σε μία πόλη 4000 κατοίκων έστω ότι 10 άτομα την ημέρα χρειάζεται να εισαχθούν στο νοσοκομείο σε κρεβάτια MEΘ Covid. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός των ελεύθερων κρεβατιών που πρέπει να διαθέτει ημερησίως το νοσοκομείο για να είναι σε θέση να εξυπηρετεί την πόλη με πιθανότητα τουλάχιστον 95%.

Δίνεται η ακόλουθη τιμή για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής: $\Phi(1.645) = 0.95$.

Λύση

Η πιθανότητα κάποιος από τους $n = 4000$ κατοίκους να χρειαστεί κρεβάτι MEΘ Covid είναι ίση με $p = \frac{10}{4000} = 0.0025$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

Έστω N το πλήθος των κατοίκων που χρειάζονται κρεβάτι MEΘ Covid στη διάρκεια μίας μέρας. Τότε, έχουμε:

- $N \sim \Delta(n = 4000, p = 0.0025)$
- $E[N] = np = 4000 \cdot 0.0025 = 10$
- $Var[N] = np(1 - p) = 4000 \cdot 0.0025 \cdot 0.9975 = 9.975$

Έστω m το πλήθος των διαθέσιμων κρεβατιών MEΘ Covid. Θέλουμε να ισχύει:

$$P(N \leq m) \geq 0.95$$

Χρησιμοποιώντας την De Moivre-Laplace προσέγγιση της Διωνυμικής, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(N \leq m) &\geq 0.95 \\ \Rightarrow P\left(\frac{N - 10}{\sqrt{9.975}} \leq \frac{m - 10}{\sqrt{9.975}}\right) &\geq 0.95 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{9.975}}\right) &\geq 0.95 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{9.975}}\right) &\geq \Phi(1.645) \\ \Rightarrow \frac{m + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{9.975}} &\geq 1.645 \\ m &\geq 14.7 \end{aligned}$$

Άρα, ο ελάχιστος αριθμός κρεβατιών MEΘ Covid είναι 15.

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Σε μία σχολή πληροφορικής 2000 φοιτητών, έστω ότι 50 φοιτητές την ημέρα χρειάζονται να χρησιμοποιήσουν υπολογιστή από το εργαστήριο της σχολής (1 υπολογιστή ο κάθε φοιτητής). Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός των ελεύθερων υπολογιστών που πρέπει να διαθέτει ημερησίως το εργαστήριο της σχολής, για να είναι σε θέση να εξυπηρετεί τους φοιτητές της σχολής με πιθανότητα τουλάχιστον 90%.

Δίνεται η ακόλουθη τιμή για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής: $\Phi(1.282) = 0.9$.

Λύση

Η πιθανότητα κάποιος από τους $n = 2000$ φοιτητές να χρειαστεί υπολογιστή από το εργαστήριο της σχολής είναι ίση με $p = \frac{50}{2000} = 0.025$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

Έστω N το πλήθος των φοιτητών που χρειάζονται υπολογιστή από το εργαστήριο της σχολής στη διάρκεια μίας μέρας. Τότε, έχουμε:

- $N \sim \Delta(n = 2000, p = 0.025)$
- $E[N] = np = 2000 \cdot 0.025 = 50$
- $Var[N] = np(1 - p) = 2000 \cdot 0.025 \cdot 0.975 = 48.75$

Έστω m το πλήθος των διαθέσιμων υπολογιστών στο εργαστήριο της σχολής. Θέλουμε να ισχύει:

$$P(N \leq m) \geq 0.90$$

Χρησιμοποιώντας την De Moivre-Laplace προσέγγιση της Διωνυμικής, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(N \leq m) &\geq 0.90 \\ \Rightarrow P\left(\frac{N - 50}{\sqrt{48.75}} \leq \frac{m - 50}{\sqrt{48.75}}\right) &\geq 0.90 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 50}{\sqrt{48.75}}\right) &\geq 0.90 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 50}{\sqrt{48.75}}\right) &\geq \Phi(1.282) \\ \Rightarrow \frac{m + \frac{1}{2} - 50}{\sqrt{48.75}} &\geq 1.282 \\ m &\geq 58.4511 \end{aligned}$$

Άρα, ο ελάχιστος αριθμός ελεύθερων υπολογιστών είναι 59.

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Σε μία μικρή πόλη με ένα ξενοδοχείο, έρχονται την καλοκαιρινή περίοδο 1000 τουρίστες. Έστω ότι 5 τουρίστες την ημέρα χρειάζονται από ένα δωμάτιο ο καθένας. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός των ελεύθερων δωματίων που πρέπει να διαθέτει ημερησίως το ξενοδοχείο για να είναι σε θέση να εξυπηρετεί τους τουρίστες που έρχονται στην πόλη με πιθανότητα τουλάχιστον 99%.

Δίνεται η ακόλουθη τιμή για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής: $\Phi(2.33) = 0.99$.

Λύση

Η πιθανότητα κάποιος από τους $n = 1000$ τουρίστες να χρειαστεί δωμάτιο στο ξενοδοχείο είναι ίση με $p = \frac{5}{1000} = 0.005$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

Έστω N το πλήθος των τουριστών που χρειάζονται δωμάτιο στη διάρκεια μίας μέρας. Τότε, έχουμε:

- $N \sim \Delta(n = 1000, p = 0.005)$
- $E[N] = np = 1000 \cdot 0.005 = 5$
- $Var[N] = np(1 - p) = 1000 \cdot 0.005 \cdot 0.995 = 4.975$

Έστω m το πλήθος των διαθέσιμων δωματίων στο ξενοδοχείο. Θέλουμε να ισχύει:

$$P(N \leq m) \geq 0.99$$

Χρησιμοποιώντας την De Moivre-Laplace προσέγγιση της Διωνυμικής, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(N \leq m) &\geq 0.99 \\ \Rightarrow P\left(\frac{N - 5}{\sqrt{4.975}} \leq \frac{m - 5}{\sqrt{4.975}}\right) &\geq 0.99 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 5}{\sqrt{4.975}}\right) &\geq 0.99 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 5}{\sqrt{4.975}}\right) &\geq \Phi(2.33) \\ \Rightarrow \frac{m + \frac{1}{2} - 5}{\sqrt{4.975}} &\geq 2.33 \\ m &\geq 9.7 \end{aligned}$$

Άρα, ο ελάχιστος αριθμός δωματίων είναι 10.

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Έστω ένα κατάστημα ρούχων με 300 πελάτες ημερησίως. Αν 20 πελάτες την ημέρα αγοράζουν από ένα παντελόνι, να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός παντελονιών που πρέπει να διαθέτει ημερησίως το κατάστημα για να είναι σε θέση να εξυπηρετεί τους πελάτες με πιθανότητα τουλάχιστον 97%. Δίνεται η ακόλουθη τιμή για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής: $\Phi(1.88) = 0.97$.

Λύση

Η πιθανότητα κάποιος από τους $n = 300$ πελάτες να αγοράσει παντελόνι από το κατάστημα είναι ίση με $p = \frac{20}{300} = 0.0667$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

Έστω N το πλήθος των πελατών που αγοράζουν παντελόνι στη διάρκεια μίας μέρας. Τότε, έχουμε:

- $N \sim \Delta(n = 300, p = 0.0667)$
- $E[N] = np = 300 \cdot 0.0667 = 20$
- $Var[N] = np(1 - p) = 300 \cdot 0.0667 \cdot 0.9333 = 18.68$

Έστω m το πλήθος των διαθέσιμων παντελονιών στο κατάστημα. Θέλουμε να ισχύει:

$$P(N \leq m) \geq 0.97$$

Χρησιμοποιώντας την De Moivre-Laplace προσέγγιση της Διωνυμικής, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(N \leq m) &\geq 0.97 \\ \Rightarrow P\left(\frac{N - 20}{\sqrt{18.68}} \leq \frac{m - 20}{\sqrt{18.68}}\right) &\geq 0.97 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 20}{\sqrt{18.68}}\right) &\geq 0.97 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 20}{\sqrt{18.68}}\right) &\geq \Phi(1.88) \\ \Rightarrow \frac{m + \frac{1}{2} - 20}{\sqrt{18.68}} &\geq 1.88 \\ m &\geq 27.63 \end{aligned}$$

Άρα, ο ελάχιστος αριθμός παντελονιών είναι 28.