

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
9 Απριλίου 2021 - Διάρκεια: 1.5 Ωρες

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις.

Δύο πηγές A και B στέλνουν πακέτα πληροφορίας σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_A και λ_B [πακέτα ανά sec], αντίστοιχα. Τα πακέτα είναι τόσο σύντομα ώστε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι καταλαμβάνουν σημεία στον άξονα του χρόνου. Το πλήθος των bytes σε κάθε πακέτο, ανεξάρτητα από ποια πηγή προέρχεται, μοντελοποιείται από την τυχαία μεταβλητή W με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_W(w) = \begin{cases} 0.4 & w = 1000, \\ 0.3 & w = 1500, \\ 0.3 & w = 2000, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι συνολικά 12 πακέτα θα φτάσουν στον κόμβο το χρονικό διάστημα των 5 λεπτών μεταξύ 09:35-09:40 δεδομένου ότι 38 πακέτα έφτασαν το διάστημα μεταξύ 09:25-09:35;

(β) Υπολογίστε το μέσο πλήθος των **bytes**, $E[N]$, που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου έως ότου ο κόμβος λάβει ακριβώς 15 πακέτα των 1500 bytes το καθένα από την πηγή A.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς 7 από τα επόμενα 15 πακέτα να προέρχονται από την πηγή A.

Λύση

(α) Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και του γεγονότος ότι τα χρονικά διαστήματα 09:35-09:40 και 09:25-09:35 δεν επικαλύπτονται, η πιθανότητα που ζητάμε είναι απλά η πιθανότητα 12 αφίξεων πακέτων σε χρονικό διάστημα 5 λεπτών. Έστω R το πλήθος των αφίξεων πακέτων της συγχωνευμένης σ.δ. με ρυθμό $\lambda_A + \lambda_B$, σε χρόνο $\tau = 5 \text{ λεπτά} = 5 \cdot 60 = 300 \text{ sec}$. Τότε:

$$R \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot \tau).$$

$$\text{Άρα, } P(R = 12) = \frac{[(\lambda_A + \lambda_B) \cdot 300]^{12}}{12!} \cdot e^{-300(\lambda_A + \lambda_B)}.$$

(β) Έστω W_i το πλήθος των bytes καθενός από τα R_t πακέτα που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec. Έχουμε ότι $R_t \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot t)$ και $E[R_t] = (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

Επίσης: $E[W_i] = 0.4 \cdot 1000 + 0.3 \cdot 1500 + 0.3 \cdot 2000 = 1450 \text{ bytes}$.

Το πλήθος των bytes σε χρόνο t sec. είναι: $N = W_1 + \dots + W_{R_t}$.

Με άλλα λόγια, το πλήθος των bytes είναι ένα άθροισμα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Συνεπώς, $E[N] = E[W_i] \cdot E[R_t] = 1450 \cdot (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

(γ) Πακέτα των 1500 bytes φτάνουν από την πηγή Α σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_A \cdot P(W = 1500) = 0.3\lambda_A$.

Συνεπώς, ο χρόνος X έως τη λήψη 15 πακέτων των 1500 bytes ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 15 με παράμετρο $0.3\lambda_A$:

$$f_X(x) = \frac{(0.3\lambda_A)^{15} \cdot x^{14}}{14!} \cdot e^{-0.3\lambda_A \cdot x}$$

$$E[X] = \frac{15}{0.3\lambda_A} = \frac{50}{\lambda_A} \text{ sec.}$$

(δ) Η πιθανότητα ένα πακέτο που φτάνει στον κόμβο να προέρχεται από την πηγή Α είναι $\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$. Το πλήθος των πακέτων (στα επόμενα 15) που προέρχονται από την πηγή Α ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $n = 15$ και $p = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\binom{15}{7} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^7 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^8$.

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις.

Δύο πηγές A και B στέλνουν πακέτα πληροφορίας σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_A και λ_B [πακέτα ανά sec], αντίστοιχα. Τα πακέτα είναι τόσο σύντομα ώστε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι καταλαμβάνουν σημεία στον άξονα του χρόνου. Το πλήθος των bytes σε κάθε πακέτο, ανεξάρτητα από ποια πηγή προέρχεται, μοντελοποιείται από την τυχαία μεταβλητή W με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_W(w) = \begin{cases} 0.5 & w = 1200, \\ 0.3 & w = 1800, \\ 0.2 & w = 2500, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι συνολικά 16 πακέτα θα φτάσουν στον κόμβο το χρονικό διάστημα των 8 λεπτών μεταξύ 11:52-12:00 δεδομένου ότι 42 πακέτα έφτασαν το διάστημα μεταξύ 11:20-11:30;

(β) Υπολογίστε το μέσο πλήθος των **bytes**, $E[N]$, που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου έως ότου ο κόμβος λάβει ακριβώς 11 πακέτα των 1200 bytes το καθένα από την πηγή A.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς 9 από τα επόμενα 11 πακέτα να προέρχονται από την πηγή B.

Λύση

(α) Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και του γεγονότος ότι τα χρονικά διαστήματα 11:52-12:00 και 11:20-11:30 δεν επικαλύπτονται, η πιθανότητα που ζητάμε είναι απλά η πιθανότητα 16 αφίξεων πακέτων σε χρονικό διάστημα 8 λεπτών. Έστω R το πλήθος των αφίξεων πακέτων της συγχωνευμένης σ.δ. με ρυθμό $\lambda_A + \lambda_B$, σε χρόνο $\tau = 8 \text{ λεπτά} = 8 \cdot 60 = 480 \text{ sec}$. Τότε:

$$R \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot \tau).$$

$$\text{Άρα, } P(R = 16) = \frac{[(\lambda_A + \lambda_B) \cdot 480]^{16}}{16!} \cdot e^{-480(\lambda_A + \lambda_B)}.$$

(β) Έστω W_i το πλήθος των bytes καθενός από τα R_t πακέτα που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec. Έχουμε ότι $R_t \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot t)$ και $E[R_t] = (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

Επίσης: $E[W_i] = 0.5 \cdot 1200 + 0.3 \cdot 1800 + 0.2 \cdot 2500 = 1640 \text{ bytes}$.

Το πλήθος των bytes σε χρόνο t sec. είναι: $N = W_1 + \dots + W_{R_t}$.

Με άλλα λόγια, το πλήθος των bytes είναι ένα άθροισμα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Συνεπώς, $E[N] = E[W_i] \cdot E[R_t] = 1640 \cdot (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

(γ) Πακέτα των 1200 bytes φτάνουν από την πηγή Α σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_A \cdot P(W = 1200) = 0.5\lambda_A$.

Συνεπώς, ο χρόνος X έως τη λήψη 11 πακέτων των 1200 bytes ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 11 με παράμετρο $0.5\lambda_A$:

$$f_X(x) = \frac{(0.5\lambda_A)^{11} \cdot x^{10}}{10!} \cdot e^{-0.5\lambda_A \cdot x}$$

$$E[X] = \frac{11}{0.5\lambda_A} = \frac{22}{\lambda_A} \text{ sec.}$$

(δ) Η πιθανότητα ένα πακέτο που φτάνει στον κόμβο να προέρχεται από την πηγή Β είναι $\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$. Το πλήθος των πακέτων (στα επόμενα 11) που προέρχονται από την πηγή Β ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $n = 11$ και $p = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\binom{11}{9} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^9 \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^2$.

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις.

Δύο πηγές A και B στέλνουν πακέτα πληροφορίας σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_A και λ_B [πακέτα ανά sec], αντίστοιχα. Τα πακέτα είναι τόσο σύντομα ώστε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι καταλαμβάνουν σημεία στον άξονα του χρόνου. Το πλήθος των bytes σε κάθε πακέτο, ανεξάρτητα από ποια πηγή προέρχεται, μοντελοποιείται από την τυχαία μεταβλητή W με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_W(w) = \begin{cases} 0.2 & w = 1000, \\ 0.7 & w = 2000, \\ 0.1 & w = 3000, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι συνολικά 20 πακέτα θα φτάσουν στον κόμβο το χρονικό διάστημα των 10 λεπτών μεταξύ 10:10-10:20 δεδομένου ότι 20 πακέτα έφτασαν το διάστημα μεταξύ 10:00-10:10;

(β) Υπολογίστε το μέσο πλήθος των **bytes**, $E[N]$, που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου έως ότου ο κόμβος λάβει ακριβώς 4 πακέτα των 3000 bytes το καθένα από την πηγή B.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς 1 από τα επόμενα 10 πακέτα να προέρχονται από την πηγή A.

Λύση

(α) Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και του γεγονότος ότι τα χρονικά διαστήματα 10:00-10:10 και 10:10-10:20 δεν επικαλύπτονται, η πιθανότητα που ζητάμε είναι απλά η πιθανότητα 20 αφίξεων πακέτων σε χρονικό διάστημα 10 λεπτών. Έστω R το πλήθος των αφίξεων πακέτων της συγχωνευμένης σ.δ. με ρυθμό $\lambda_A + \lambda_B$, σε χρόνο $\tau = 10$ λεπτά = $10 \cdot 60 = 600$ sec. Τότε:

$$R \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot \tau).$$

$$\text{Άρα, } P(R = 20) = \frac{[(\lambda_A + \lambda_B) \cdot 600]^{20}}{20!} \cdot e^{-600(\lambda_A + \lambda_B)}.$$

(β) Έστω W_i το πλήθος των bytes καθενός από τα R_t πακέτα που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec. Έχουμε ότι $R_t \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot t)$ και $E[R_t] = (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

Επίσης: $E[W_i] = 0.2 \cdot 1000 + 0.7 \cdot 2000 + 0.1 \cdot 3000 = 1900$ bytes.

Το πλήθος των bytes σε χρόνο t sec. είναι: $N = W_1 + \dots + W_{R_t}$.

Με άλλα λόγια, το πλήθος των bytes είναι ένα άθροισμα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Συνεπώς, $E[N] = E[W_i] \cdot E[R_t] = 1900 \cdot (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

(γ) Πακέτα των 3000 bytes φτάνουν από την πηγή B σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_B \cdot P(W = 3000) = 0.1\lambda_B$.

Συνεπώς, ο χρόνος X έως τη λήψη 4 πακέτων των 3000 bytes ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 4 με παράμετρο $0.1\lambda_B$:

$$f_X(x) = \frac{(0.1\lambda_B)^4 \cdot x^3}{3!} \cdot e^{-0.1\lambda_B \cdot x}$$

$$E[X] = \frac{4}{0.1\lambda_B} = \frac{40}{\lambda_B} \text{ sec.}$$

(δ) Η πιθανότητα ένα πακέτο που φτάνει στον κόμβο να προέρχεται από την πηγή A είναι $\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$. Το πλήθος των πακέτων (στα επόμενα 10) που προέρχονται από την πηγή A ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $n = 10$ και $p = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\binom{10}{1} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^1 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^9$.

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις.

Δύο πηγές A και B στέλνουν πακέτα πληροφορίας σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_A και λ_B [πακέτα ανά sec], αντίστοιχα. Τα πακέτα είναι τόσο σύντομα ώστε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι καταλαμβάνουν σημεία στον άξονα του χρόνου. Το πλήθος των bytes σε κάθε πακέτο, ανεξάρτητα από ποια πηγή προέρχεται, μοντελοποιείται από την τυχαία μεταβλητή W με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_W(w) = \begin{cases} 0.2 & w = 500, \\ 0.2 & w = 1000, \\ 0.6 & w = 2000, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι συνολικά 10 πακέτα θα φτάσουν στον κόμβο το χρονικό διάστημα των 15 λεπτών μεταξύ 16:40-16:55 δεδομένου ότι 10 πακέτα έφτασαν το διάστημα μεταξύ 16:25-16:40;

(β) Υπολογίστε το μέσο πλήθος των **bytes**, $E[N]$, που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου έως ότου ο κόμβος λάβει ακριβώς 5 πακέτα των 500 bytes το καθένα από την πηγή B.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς 5 από τα επόμενα 10 πακέτα να προέρχονται από την πηγή B.

Λύση

(α) Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και του γεγονότος ότι τα χρονικά διαστήματα 16:25-16:40 και 16:40-16:55 δεν επικαλύπτονται, η πιθανότητα που ζητάμε είναι απλά η πιθανότητα 10 αφίξεων πακέτων σε χρονικό διάστημα 15 λεπτών. Έστω R το πλήθος των αφίξεων πακέτων της συγχωνευμένης σ.δ. με ρυθμό $\lambda_A + \lambda_B$, σε χρόνο $\tau = 15 \text{ λεπτά} = 15 \cdot 60 = 900 \text{ sec}$. Τότε:

$$R \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot \tau).$$

$$\text{Άρα, } P(R = 10) = \frac{[(\lambda_A + \lambda_B) \cdot 900]^{10}}{10!} \cdot e^{-900(\lambda_A + \lambda_B)}.$$

(β) Έστω W_i το πλήθος των bytes καθενός από τα R_t πακέτα που φτάνουν στον κόμβο σε χρόνο t sec. Έχουμε ότι $R_t \sim \text{Poisson}((\lambda_A + \lambda_B) \cdot t)$ και $E[R_t] = (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

Επίσης: $E[W_i] = 0.2 \cdot 500 + 0.2 \cdot 1000 + 0.6 \cdot 2000 = 1500 \text{ bytes}$.

Το πλήθος των bytes σε χρόνο t sec. είναι: $N = W_1 + \dots + W_{R_t}$.

Με άλλα λόγια, το πλήθος των bytes είναι ένα άθροισμα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Συνεπώς, $E[N] = E[W_i] \cdot E[R_t] = 1500 \cdot (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t$.

(γ) Πακέτα των 500 bytes φτάνουν από την πηγή Β σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_B \cdot P(W = 500) = 0.2\lambda_B$.

Συνεπώς, ο χρόνος X έως τη λήψη 5 πακέτων των 500 bytes ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 5 με παράμετρο $0.2\lambda_B$:

$$f_X(x) = \frac{(0.2\lambda_B)^5 \cdot x^4}{4!} \cdot e^{-0.2\lambda_B \cdot x}$$

$$E[X] = \frac{5}{0.2\lambda_B} = \frac{25}{\lambda_B} \text{ sec.}$$

(δ) Η πιθανότητα ένα πακέτο που φτάνει στον κόμβο να προέρχεται από την πηγή Β είναι $\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$. Το πλήθος των πακέτων (στα επόμενα 10) που προέρχονται από την πηγή Β ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $n = 10$ και $p = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\binom{10}{5} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^5 \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^5$.