

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/02/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 02/03/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Μετασχηματισμοί, Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις

Άσκηση 1. Έστω X μια τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = e^{-x}, x > 0$

- Να βρείτε την ρ.σ. $M_X(s)$ για τις τιμές του s για τις οποίες παίρνει πεπερασμένες τιμές.
- Χρησιμοποιώντας την M_X , υπολογίστε τις ποσότητες EX, EX^2 και $Var(X)$.
- Για την τ.μ. Y , που ορίζεται από την σχέση $Y = 2 - 3X$, υπολογίστε τη $M_Y(s)$ για τις τιμές του s για τις οποίες παίρνει πεπερασμένες τιμές.

Άσκηση 2. Έστω X η τ.μ. η οποία αντιστοιχεί στον αριθμό που δείχνει ένα ζάρι, το οποίο ρίχνουμε μια φορά.

- Να υπολογίστε την ρ.σ. της τ.μ. X .
- Χρησιμοποιήστε τη ρ.σ. για να υπολογίσετε τις ποσότητες:
 - EX .
 - EX^2 .
 - $Var(X)$.
 - την τυπική απόκλιση της X

Άσκηση 3. Η σ.π.π. της τ.μ. X δίνεται από την σχέση: $f(x) = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^x$, για $x = 0, 1, \dots$

- (i) Υπολογίστε την EX .
- (ii) Υπολογίστε τη ρ.σ. M_X της τ.μ. X και καθορίστε το εύρος των τιμών της μεταβλητής s για τις οποίες η M_X είναι πεπερασμένη.
- (iii) Εφαρμόστε τη ρ.σ. για να υπολογίσετε την EX .

Υπόδειξη: Για το (i) δίνεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$, $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)r^n = \frac{2r}{(1-r)^3}$, $|r| < 1$ και για το (ii) χρησιμοποιήστε ότι $\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{(1-r)}$, $k = 0, 1, \dots$, $|r| < 1$

Άσκηση 4. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_X(s) = e^{3s+8s^2}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή Z , η οποία ορίζεται ως: $Z = \frac{1}{4}(X - 3)$

- (i) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της τ.μ Z
- (ii) Να βρεθεί η μέση τιμή της τ.μ Z
- (iii) Να βρεθεί η διασπορά της τ.μ Z

Άσκηση 5. Ισχύει ότι: Αν X μια τ.μ. για την οποία όλες οι ροπές EX^n , $n = 0, 1, \dots$ είναι πεπερασμένες τότε:

$$M_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (EX^n) \frac{s^n}{n!}.$$

Σε αυτήν την άσκηση δεν ζητείται θεωρητική απόδειξη, αλλά να δείτε ότι όντως ισχύει με ένα παράδειγμα. Θεωρήστε την τ.μ. $X \sim N(0, 1)$

- (i) Υπολογίστε το $M_X(s)$ (όπως έχετε δει στο μάθημα).
- (ii) Αποδείξτε ότι όντως EX^n είναι πεπερασμένες για $n = 0, 1, \dots$ και υπολογίστε τις.
- (iii) Εάν $EX^n = \begin{cases} 0 & \text{εάν } n \text{ περιττός} \\ \frac{2^{-\frac{n}{2}} n!}{(n/2)!} & \text{εάν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$, φτιάξτε ένα πρόγραμμα ώστε να δείτε προσεγγιστικά την παραπάνω σχέση. Δηλαδή, διαλέξτε 2 τυχαίες τιμές για το s . Το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει το $M_X(s)$ για τα s που επιλέξατε και το άθροισμα

$$sum = \sum_{n=0}^N (EX^n) \frac{s^n}{n!},$$

για τα ίδια s και για N αρκετά μεγάλο ώστε η διαφορά $M_X(s) - sum$ να γίνει μικρότερη από:

- 0.01
- 0.0001
- 0.000001

Το πρόγραμμά σας πρέπει να επιστρέφει τα s που επιλέξατε και τα αντίστοιχα N για κάθε μία από τις τρεις τιμές.

Υπόδειξη: Για το (ii) χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά μέρη και επαγωγή, ώστε να καταλήξετε στον τυπο που δίνεται στο (iii)

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα της άσκησης αυτής μας λέει ότι οι ροπές μιας τ.μ. καθορίζουν (κάτω από ορισμένες συνθήκες) τη ρ.σ. της τ.μ. και κατά συνέπεια την κατανομή. Όποιος/α θέλει να δει και την θεωρητική απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιήσει το ανάπτυγμα $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$