

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(i) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= Ee^{sX} = \int_0^\infty e^{sx} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-(1-s)x} dx \\ &= -\frac{1}{1-s} e^{-(1-s)x} \Big|_{s=0}^\infty \quad (\text{για } s \neq 1) \\ &= -\frac{1}{1-s} (0 - 1) = \frac{1}{1-s} \quad (\text{για } 1-s > 0 \text{ ή } s < 1) \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, $M_X(s) = \frac{1}{1-s}, s < 1$:

(ii) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} M_X(s) \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{(1-s)^2} \Big|_{s=0} = 1 = EX \\ \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(1-s)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(1-s)^3} \Big|_{s=0} = 2 = EX^2 \end{aligned}$$

οπότε είναι $Var(X) = 2 - 1^2 = 1$

(iii) Έχουμε:

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= M_{2-3X}(s) = M_{-3X+2}(s) = e^{2s} M_X(-3s) \\ &= e^{2s} \frac{1}{1 - (-3s)} \\ &= \frac{e^{2s}}{1 + 3s} \quad \text{για } (s > -\frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Έχουμε ότι η σ.μ.π. της τ.μ. X είναι η εξής $f(x) = \frac{1}{6}$ για $x = 1, 2, \dots, 6$

(i) Η αντίστοιχη ρ.σ. είναι

$$M_X(s) = Ee^{sX} = \sum_{x=1}^6 e^{sx} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 e^{sx}$$

(ii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 1-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\frac{dM_X(s)}{ds} = \frac{d \left(\frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 e^{sx} \right)}{ds} = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x e^{sx}$$

Άρα, για τη μέση τιμή της τ.μ. X έχουμε:

$$EX = \frac{dM_X(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x e^{sx} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} + \frac{2}{9} = 3.5$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο 2-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\frac{d^2 M_X(s)}{ds^2} = \frac{d \left(\frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x e^{sx} \right)}{ds} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=1}^6 x^2 e^{sx}$$

Άρα, για τη ροπή 2-ης τάξης της τ.μ. X έχουμε:

$$EX^2 = \frac{d^2 M_X(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x^2 e^{sx} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 = \frac{91}{6}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς της τ.μ. X , $Var(X)$, θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$

Άρα, η διασπορά της τ.μ. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6} \right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{546 - 441}{36} = \frac{105}{36} \approx 2.9$$

Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης έχουμε:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{105}{36}} \approx 1.7$$

Άσκηση 3.

(i) Η μέση τιμή της τ.μ. X γίνεται:

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^x = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} x \left(\frac{1}{3} \right)^x$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$, έχουμε ότι:

$$EX = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} x \left(\frac{1}{3} \right)^x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3} \right)^2} = \frac{1}{2}$$

(ii) Για την ρ.σ. έχουμε:

$$M_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{sx} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^x = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(e^s \cdot \frac{1}{3} \right)^x$$

Εάν $(e^s \cdot \frac{1}{3}) \geq 1$, τότε η σειρά αποκλίνει, άρα η ρ.σ. δεν είναι πεπερασμένη. Επομένως, θέλουμε $(e^s \cdot \frac{1}{3}) < 1 \Rightarrow e^s < 3 \Rightarrow s < \ln 3$, ώστε η ροπογεννήτρια να είναι πεπερασμένη. Άρα, χρησιμοποιώντας την σχέση $\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{(1-r)}$, αφού $(e^s \cdot \frac{1}{3}) < 1$, έχουμε:

$$M_X(s) = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} (e^s \cdot \frac{1}{3})^x = \frac{2}{3} \cdot \frac{(e^s \cdot \frac{1}{3})^0}{1 - e^s \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3 - e^s},$$

για $s < \ln 3$

(iii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 1-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\frac{dM_X(s)}{ds} = \frac{d\left(\frac{2}{3-e^s}\right)}{ds} = -2 \cdot \frac{1}{(3-e^s)^2} \cdot (-e^s)$$

Άρα, για τη μέση τιμή της τ.μ X έχουμε:

$$E[X] = \left. \frac{dM_X(s)}{ds} \right|_{s=0} = 2 \cdot \frac{1}{(3-e^s)^2} \cdot e^s \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 4.

(i) Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ Z γίνεται:

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= E[e^{sZ}] = E[e^{s/4(X-3)}] = E[e^{\frac{s}{4} \cdot X} \cdot e^{-3s/4}] = \\ &= e^{-3s/4} \cdot E[e^{\frac{s}{4} \cdot X}] = \\ &= e^{-3s/4} \cdot M_X(s/4) = \\ &= e^{-3s/4} \cdot e^{3s/4 + 8(s/4)^2} = e^{s^2/2} \end{aligned}$$

(ii) Η μέση τιμή της τ.μ Z γίνεται:

$$E[Z] = M'_Z(s)|_{s=0} = s \cdot e^{s^2/2}|_{s=0} = 0$$

(iii) Η διασπορά της τ.μ Z γίνεται:

$$\begin{aligned} var(Z) &= E[Z^2] - (E[Z])^2 = M''_Z(s)|_{s=0} - 0 = (s)' \cdot e^{s^2/2} + s^2 \cdot e^{s^2/2} \Big|_{s=0} = \\ &= e^{s^2/2} \cdot (1 + s^2) \Big|_{s=0} = 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

(i) Έχουμε ότι $X \sim N(0, 1)$, άρα $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ επομένως:

$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{sx} dx = e^{\frac{s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + sx - \frac{s^2}{2}} dx = e^{\frac{s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2}} dx = e^{\frac{s^2}{2}}$$

(ii) Για τον υπολογισμό των EX^n θα χρησιμοποιήσουμε την υπόδειξη. Έχουμε ότι:

$$EX^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} (x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}) dx$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} (x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} (-e^{-\frac{x^2}{2}})' dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + n \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \\ &= 0 + (n-1)EX^{n-2} \end{aligned}$$

Επίσης, $EX^0 = 1$ και $EX = 0$, οπότε επαγωγικά καταλήγουμε στον τύπο:

$$EX^n = \begin{cases} 0 & \text{για } n \text{ περιττό} \\ \frac{2^{-\frac{n}{2}} n!}{(n/2)!} & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

(iii) Ο παρακάτω κώδικας είναι σε *python*. Κάθε άλλη γλώσσα είναι δεκτή, εφόσον τυπώνεται το σωστό αποτέλεσμα. Ο περιορισμός $|s| \leq 7$, προκύπτει διότι, παρότι στην θεωρία η ρ.σ. και οι ροπές είναι παντού πεπερασμένες, στην πράξη οι αριθμοί γίνονται υπερβολικά μεγάλοι, ακόμα και για σχετικά μικρές τιμές του s .

```

1  import numpy as np #to calculate factorials(you can also make your own factorial function).
2
3
4  def EX(n):#we define EX^n, it checks if n is odd or not.
5      if n%2==0:
6          return ((2**(-n/2))*np.math.factorial(n))/np.math.factorial(n/2)
7      else:
8          return 0
9
10 def Mx(s):#we define Mx and calculate it depending on the random s.
11     return np.exp((s**2)/2)
12
13 def sum(n,s):#we calculate and return the sum with given N and s.
14     result=0
15     for i in range(n+1):
16         result+=(EX(i))*((s**i)/np.math.factorial(i))
17     return result
18
19 #We ask for two random s(preferably between -7 and 7).
20 s1=float(input("give me a random s:"))
21 s2=float(input("give me one more random s:"))
22 #We calculate Mx for s1 and s2.
23 M1=Mx(s1)
24 M2=Mx(s2)
25
26 def results(M,s,c):
27     n=0
28     while abs(M-sum(n,s))>c:#we increase n until the difference is less than c
29         n+=1
30     print(f'selected s:{s} and N:{n} for {c} difference')#we print the results.
31
32 ###We print s and their corresponding N for each difference.
33 results(M1,s1,0.01)
34 results(M1,s1,0.0001)
35 results(M1,s1,0.000001)
36 results(M2,s2,0.01)
37 results(M2,s2,0.0001)
38 results(M2,s2,0.000001)
39
40

```

```
give me a random s:2
```

```
give me one more random s:05
```

```
selected s:2.0 and N:14 for 0.01 difference
```

```
selected s:2.0 and N:20 for 0.0001 difference
```

```
selected s:2.0 and N:26 for 1e-06 difference
```

```
selected s:5.0 and N:72 for 0.01 difference
```

```
selected s:5.0 and N:80 for 0.0001 difference
```

```
selected s:5.0 and N:86 for 1e-06 difference
```