

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό εξάμηνο
2021-2022

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Σετ Ασκήσεων 3

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/03/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 06/04/2022

Διαδικασίες Bernoulli και Poisson

Άσκηση 1

Μια συννεφιασμένη μέρα ρισκάρετε και παίρνετε το ποδήλατο για να φτάσετε στο Πανεπιστήμιο. Ένα λεπτό πριν φτάσετε, διαπιστώνετε ότι ξεκινά ένα ψιλόβροχο. Υπολογίζετε ότι κάθε δευτερόλεπτο που περνά, σας χτυπάει μια σταγόνα ανεξάρτητα με πιθανότητα 0.5.

- α') Ποια η ΣΜΠ, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου μέχρι να σας χτυπήσει μια σταγόνα για πρώτη φορά;
- β') Κατά μέσο όρο, πόσες σταγόνες θα σας χτυπήσουν ώπου να φτάσετε στο Πανεπιστήμιο;
- γ') Ποια η πιθανότητα να μην σας χτυπήσει καμία σταγόνα τα επόμενα 10 δευτερόλεπτα;
- δ') Εφόσον συνέβη το παραπάνω ενδεχόμενο, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά το χρόνου μέχρι να σας χτυπήσει η επόμενη σταγόνα;

Άσκηση 2

Για τις ανάγκες της δουλειάς σας, έχετε κάνει για μία μέρα εκτροπή από το τηλέφωνο της εργασίας στο προσωπικό σας τηλέφωνο. Ως αποτέλεσμα, όταν χτυπήσει το τηλέφωνό σας δεν γνωρίζετε αν είναι επαγγελματικό ή προσωπικό. Υποθέστε ότι όταν χτυπήσει είναι επαγγελματικό με πιθανότητα p ή προσωπικό τηλεφώνημα με πιθανότητα $1 - p$. Στο τέλος του ωραρίου σας, έχετε δεχτεί συνολικά 30 κλήσεις.

- α') Ποια η ΣΜΠ, η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των επαγγελματικών τηλεφωνημάτων;
- β') Προσδιορίστε την μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς των αριθμών των δύο ειδών τηλεφωνημάτων.
- γ') Υποθέστε ότι το πρώτο τηλεφώνημα είναι επαγγελματικό. Ποια η δεσμευμένη ΣΜΠ, μέση τιμή και διασπορά των επαγγελματικών κλήσεων;

Άσκηση 3

Ο Γιώργος φτάνει στη στάση του λεωφορείου, όμως συνειδητοποιεί ότι έχει ξεχάσει το πορτοφόλι του. Επειδή επείγει να φτάσει στον προορισμό του, αποφασίζει ότι είναι προτιμότερο να δοκιμάσει το ωτοστοπ. Τα διερχόμενα αυτοκίνητα σταματούν σε ωτοστόπ σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 0.1$ ανά λεπτό. Υποθέστε αρχικά ότι οποιοδήποτε αυτοκίνητο σταματήσει, θα μπορέσει να τον εξυπηρετήσει.

- α') Βρείτε την πιθανότητα ότι ο Γιώργος θα περιμένει για περισσότερο από 20 λεπτά.
- β') Βρείτε την πιθανότητα ότι θα περιμένει μεταξύ 10 και 30 λεπτών.
- γ') Βρείτε την πιθανότητα ότι περιμένει το πολύ μέχρι 20 λεπτά.
- δ') Υποθέστε τώρα ότι ακόμη και αν σταματήσει κάποιο αυτοκίνητο, υπάρχει μια πιθανότητα 0.5 να μην μπορεί να τον εξυπηρετήσει για τον προορισμό του. Με ποια πιθανότητα, τα επόμενα δύο αυτοκίνητα που θα σταματήσουν δεν θα μπορέσουν να τον εξυπηρετήσουν;

Άσκηση 4

Από τη στάση του λεωφορείου περνάνε λεωφορεία με προορισμό το Πανεπιστήμιο σε ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα που είναι κατανομημένα εκθετικά με μια παράμετρο μ . Στην στάση φτάνουν φοιτητές σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ /ώρα.

- α') Βρείτε τη ΣΜΠ του αριθμού των αναχωρήσεων των λεωφορείων στη διάρκεια μιας ώρας.
- β') Έστω $Y = A + B$ η τ.μ. που είναι το άθροισμα των αφίξεων των λεωφορείων A και των φοιτητών B μέσα σε μια ώρα. Βρείτε την μέση τιμή $E[Y]$.
- γ') Αν ένας φοιτητής φτάσει στην στάση και δει ότι 3 φοιτητές ήδη περιμένουν, υπολογίστε την δεσμευμένη μέση τιμή του χρόνου μέχρι την άφιξη του επόμενου λεωφορείου.
- δ') Υπολογίστε τη ΣΜΠ του αριθμού των επιβατών σε ένα λεωφορείο.

Άσκηση 5

Δύο πομποί αποστέλλουν ανεξάρτητα μηνύματα σε ένα κοινό δέκτη σύμφωνα με μία Poisson διαδικασία με ρυθμούς λ_A και λ_B , αντίστοιχα. Το μήκος κάθε μηνύματος σε bits, ανεξαρτήτως της πηγής, είναι μια τυχαία μεταλητή W με ΣΜΠ

$$p_W(w) = \begin{cases} 2/6, & w = 4 \\ 3/6, & w = 8 \\ 1/6, & w = 16 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- α') Ποια η πιθανότητα ότι κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος t θα ληφθούν ακριβώς εννέα μηνύματα;
- β') Έστω N ο συνολικός αριθμός bits που λαμβάνονται κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος t . Ποια η μέση τιμή της N ;
- γ') Προσδιορίστε τη ΣΠΠ του χρόνου από $t = 0$ μέχρι ο δέκτης να λάβει ακριβώς 32 bits από τον πομπό Α.
- δ') Ποια η πιθανότητα ότι ακριβώς οκτώ από τα επόμενα δώδεκα μηνύματα που θα ληφθούν θα είναι από τον πομπό Α;

Άσκηση 6

Σε αυτήν την άσκηση θα προσομοιώσετε την Poisson ΣΜΠ ξεκινώντας από μια διαδικασία Bernoulli. Θα χρειαστείτε ένα υπολογιστικό εργαλείο όπως η MATLAB.

- α') Ξεκινήστε ορίζοντας το χρονικό μέγεθος της διαδικασίας τ και το μέγεθος δ των σχισμών στο οποίο ελέγχουμε αν υπάρχει κάποια άφιξη ή όχι.
- β') Υπολογίστε τον συνολικό αριθμό των σχισμών $n = \tau/\delta$. Π.χ. αν $\tau = 100$ και $\delta = 10$, αυτό σημαίνει ότι χωρίζουμε τον χρόνο σε $n = 100/10 = 10$ σχισμές, στις οποίες ελέγχουμε αν υπάρχει άφιξη ή όχι.
- γ') Ορίστε τον ρυθμό άφιξης λ . Αυτός είναι ο ρυθμός με τον οποίο υπάρχουν αφίξεις στον συνολικό χρόνο. Δηλαδή στον χρόνο τ θα υπάρχουν κατά μέσο όρο συνολικά λ αφίξεις.
- δ') Με βάση τα παραπάνω, η πιθανότητα άφιξης σε κάθε μία από τις διαφορετικές σχισμές, είναι $p = \lambda/n$.
- ε') Για $N = 10000$ ανεξάρτητες επαναλήψεις, μετρήστε σε πόσες σχισμές υπάρχει άφιξη και αποθηκεύστε το σε ένα διάνυσμα Y .
- ς') Δείξτε στο ίδιο *plot* την πειραματική μάζα πιθανότητας (στην MATLAB μία διαθέσιμη μέθοδος είναι η `histogram(Y)`) και την θεωρητική ΣΜΠ της Poisson με παράμετρο λ (είτε γράψτε οι ίδιοι/ες τον τύπο, είτε χρησιμοποιήστε μια εντολή όπως η `poisspdf` στην MATLAB).
- ζ') Υπολογίστε τον μέσο όρο των αφίξεων στο συνολικό χρονικό διάστημα. Τι παρατηρείτε;
- η') Επαναλάβετε τα παραπάνω για διαφορετικές τιμές του δ . Ξεκινήστε από ένα μεγάλο μέγεθος και αρχίστε να το μικραίνετε. Τι παρατηρείτε;

Μπορείτε επίσης να πειραματιστείτε με διαφορετικές τιμές του δ .

Στην αναφορά σας σχολιάσετε τα συμπεράσματά από τα πειράματά σας.