

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό εξάμηνο
2021-2022

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Σετ Ασκήσεων 3

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/03/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 06/04/2022

Διαδικασίες Bernoulli και Poisson

Άσκηση 1

α') Δεδομένου ότι κάθε πτώση είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, το χρονικό διάστημα T μεταξύ των επόμενων πτώσεων θα ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $0,5$,

$$p_T(t) = 0.5^{t-1} \cdot 0.5^1 = 0.5^t, \quad t \geq 1,$$

με μέση τιμή $E[T] = 1/0.5 = 2$ και διασπορά $var(T) = (1-p)/p^2 = 2$.

β') Ο αριθμός των σταγόνων σε 60 δευτερόλεπτα δίνεται από την Διωνυμική ΣΜΠ και η μέση τιμή είναι $60 \cdot 0.5 = 30$.

γ') Από την Διωνυμική ΣΜΠ,

$$p_S(0) = \binom{60}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^{60} = 0.5^{60}.$$

δ') Δεδομένου ότι η γεωμετρική κατανομή είναι χωρίς μνήμη, ο χρόνος μέχρι να χτυπήσει η επόμενη σταγόνα έχει μέση τιμή και διασπορά όπως η πρώτη σταγόνα, που δίνεται στο ερώτημα (α).

Άσκηση 2

α') Οι επαγγελματικές κλήσεις X κατανέμονται Διωνυμικά με παραμέτρους p και $n = 30$.

$$P_X(k) = \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}.$$

Η μέση τιμή και η διασπορά είναι $E[X] = 30p$, $var(X) = 30p(1-p)$.

β') Συμβολίζουμε με X τις επαγγελματικές κλήσεις και με Y τις προσωπικές κλήσεις. Προφανώς, $X + Y = 30$.

$$\begin{aligned} E[|X - Y|] &= E[X - Y | X > Y] \cdot P(X > Y) + E[Y - X | X \leq Y] \cdot P(X \leq Y) \\ &= E[X - Y | X > 15] \cdot P(X > 15) + E[Y - X | X \leq 15] \cdot P(X \leq 15) \end{aligned}$$

Οε ηαε,

$$P(X > Y) = P(X > 15) = \sum_{k=16}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} ,$$

$$P(X \leq Y) = P(X \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} ,$$

$$\begin{aligned} E[X - Y | X > 15] &= E[2X - 30 | X > 15] \\ &= 2E[X | X > 15] - 30 \\ &= 2 \sum_{k=0}^{30} k P_X(k | X > 15) - 30 \\ &= \frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=0}^{30} k P_X(k \cap X > 15) - 30 \\ &= \frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=16}^{30} k P_X(k) - 30 \\ &= \frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 30 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y - X | X \leq 15] &= E[30 - 2X | X \leq 15] \\ &= 30 - 2E[X | X \leq 15] \\ &= 30 - 2 \sum_{k=0}^{30} k P_X(k | X \leq 15) \\ &= 30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{30} k P_X(k \cap X \leq 15) \\ &= 30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{15} k P_X(k) \\ &= 30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
E[|X - Y|] &= \left(\frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 30 \right) \cdot P(X > 15) \\
&\quad + \left(30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \cdot P(X \leq 15) \\
&= 2 \sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 2 \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 30(P(X > 15) - P(X \leq 15)) \\
&= 2 \left(\sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
&\quad - 30 \left(\sum_{k=16}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
&= 2 \left(\sum_{k=0}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 2 \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
&\quad - 30 \left(\sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 2 \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
&= 2 \left(30p - 2 \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) - 30 \left(1 - 2 \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
&= 60p - 30 + 2 \sum_{k=0}^{15} (30 - 2k) \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}
\end{aligned}$$

(Θα μπορούσαμε να σταματήσουμε στην τρίτη ισότητα, αλλά καταλήξαμε σε μια πολύ πιο απλή έκφραση).

Σημείωση: Στην τέταρτη ισότητα, προσθέσαμε και αφαιρέσαμε τα αθροίσματα $\sum_{k=0}^{15} (\cdot)$. Στην πέμπτη ισότητα, αναγνωρίσαμε ότι $\sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} = E[X] = 30p$ και ότι $\sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} = 1$ είναι το άθροισμα της Διωνυμικής ΣΜΠ σε ολόκληρο το πεδίο τιμών της, το οποίο ισούται με 1.

γ') Ο αριθμός των υπόλοιπων επαγγελματιών κλήσεων X_r κατανέμεται Διωνυμικά με παραμέτρους p και $n = 29$. Ο συνολικός αριθμός επαγγελματιών κλήσεων είναι $X = 1 + X_r$. Επομένως, $E[X|X \geq 1] = 1 + E[X_r] = 1 + 29p$ και $\text{var}(X|X \geq 1) = \text{var}(X_r) = 29p(1-p)$. Ας υπολογίσουμε την ΣΜΠ,

$$\begin{aligned}
p_X(k|X \geq 1) &= \frac{p_X(k \cap X \geq 1)}{p(X \geq 1)} = \begin{cases} \frac{p_X(k)}{1-p_X(0)}, & k \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}}{1-(1-p)^{30}}, & k \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 3

α') Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει άφιξη στη διαδικασία $Poisson(\lambda)$ για 20 λεπτά, που δίνεται από

$$P_N(0, 20) = e^{-0.1 \cdot 20} = e^{-2}.$$

β') Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει άφιξη για 10 λεπτά, και να υπάρξει τουλάχιστον μία άφιξη στα επόμενα 20 λεπτά. Λόγω της ιδιότητας της απώλειας μνήμης, αυτά τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα, και έτσι η πιθανότητα δίνεται από

$$P_N(0, 10) \cdot (1 - P_N(0, 20)) = e^{-0.1 \cdot 10} \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot 20}) = e^{-1} \cdot (1 - e^{-2}) = e^{-1} - e^{-3}$$

γ') Αυτή είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μία άφιξη σε 20 λεπτά,

$$1 - P_N(0, 20) = 1 - e^{-2}$$

δ') Υποθέστε τώρα ότι ακόμη και αν σταματήσει κάποιο αυτοκίνητο, υπάρχει μια πιθανότητα 0.5 να μην μπορεί να τον εξυπηρετήσει για τον προορισμό του. Με ποια πιθανότητα, τα επόμενα δύο αυτοκίνητα που περνάνε θα σταματήσουν, αλλά δεν θα μπορέσουν να τον εξυπηρετήσουν;

Άσκηση 4

α') Δεδομένου ότι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων κατανέμεται εκθετικά, ο αριθμός των αφίξεων είναι *Poisson* τ.μ. με παράμετρο μ ,

$$P_B(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

β') Υπάρχει 'άφιξη' εάν φτάσει είτε λεωφορείο είτε φοιτητής. Αυτή είναι μια συγχωνευμένη διαδικασία *Poisson* με παράμετρο $\mu + \lambda$ και επομένως $E[Y] = \mu + \lambda$.

γ') Το ότι περιμένουν φοιτητές, υπονοεί κάποια πληροφορία για το παρελθόν. Ωστόσο, η εκθετική κατανομή είναι χωρίς μνήμη, και επομένως ο χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου λεωφορείου κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο μ . Η αναμενόμενη τιμή είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$.

δ') Θεωρήστε τη διαδικασία *Poisson* από το ερώτημα (β). Δεδομένου ότι πραγματοποιείται μια άφιξη, είναι λεωφορείο με πιθανότητα $\frac{\mu}{\mu+\lambda}$ και φοιτητής με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$. Ο αριθμός των επιβατών σε ένα λεωφορείο είναι ο αριθμός των αφίξεων φοιτητών μέχρι την επόμενη άφιξη του λεωφορείου, ο οποίος κατανέμεται ως

$$P(k) = \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)^k \frac{\mu}{\mu + \lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Άσκηση 5

α') Τα ληφθέντα μηνύματα προέρχονται από τη συγχωνευμένη διαδικασία *Poisson* με ρυθμό $\lambda_A + \lambda_B$. Συμβολίζουμε με M τον αριθμό των μηνυμάτων που ελήφθησαν. Η κατανομή του M δίνεται από την κατανομή *Poisson*,

$$p_M(9) = \frac{((\lambda_A + \lambda_B)t)^9 e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}}{9!}$$

β')

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_m p_M(m) E[N|M=m] = \sum_m p_M(m) \cdot m E[W] \\ &= \sum_m m p_M(m) \cdot \left(\frac{2}{6} \cdot 4 + \frac{3}{6} \cdot 8 + \frac{1}{6} \cdot 16 \right) \\ &= E[M] \cdot 8 \\ &= 8 \cdot (\lambda_A + \lambda_B) \cdot t. \end{aligned}$$

γ') Πρέπει να εξετάσουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς μηνυμάτων που έχουν συνολικό μήκος 32 bit. Στην περίπτωση που τα πρώτα μηνύματα από τον δέκτη A δεν αθροίζονται σε 32 (π.χ. εάν τα μηνύματα είναι με μήκη 16 + 8 + 4 + 8, το άθροισμα από 28 bit μεταβαίνει σε 36 bit), τότε ο παραλήπτης δε θα λάβει ποτέ ακριβώς 32 bit. Το επιθυμητό σύνολο ακολουθιών μηκών είναι $C = \{[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4], [4, 4, 4, 4, 4, 4, 8], [4, 4, 4, 4, 8, 8], [4, 4, 4, 4, 16], [4, 4, 8, 8, 8], [4, 4, 8, 16], [4, 4, 4, 4, 16], [8, 8, 8, 8], [8, 8, 16], [16, 16]\}$.

όπου η σειρά άφιξης δεν έχει σημασία. Κάθε μία από αυτές τις ακολουθίες $C_i \in \mathcal{C}$ έχει πιθανότητα ίση με

$$P(C_1|\mathcal{C}) = p_W(4)^8, P(C_2) = \binom{7}{1} p_W(4)^6 p_W(8), P(C_3) = \binom{6}{2} p_W(4)^4 p_W(8)^2, P(C_4) = \binom{5}{1} p_W(4)^4 p_W(16), \\ P(C_5) = \binom{5}{3} p_W(4)^2 p_W(8)^3, P(C_6) = \binom{4}{2} p_W(4)^2 p_W(8) p_W(16), P(C_7) = \binom{5}{1} p_W(4)^4 p_W(16), \\ P(C_8) = p_W(8)^4, P(C_9) = \binom{3}{1} p_W(8)^2 p_W(16), P(C_{10}) = p_W(16)^2.$$

Στη συνέχεια, πρέπει να γράψουμε τον αριθμό των μηνυμάτων M_i που απαιτείται για κάθε έναν από τους παραπάνω συνδυασμούς.

$$M_1 = 8, M_2 = 7, M_3 = 6, M_4 = 5, M_5 = 5, M_6 = 4, M_7 = 5, M_8 = 4, M_9 = 3, M_{10} = 2.$$

Η απαιτούμενη ΣΠΠ μπορεί να βρεθεί από τη συγχωνευμένη διαδικασία *Poisson* που δημιουργεί τις παραπάνω ακολουθίες μηνυμάτων. Πιο συγκεκριμένα, ο ρυθμός άφιξης M_i μηνυμάτων από τον Α είναι $\frac{\lambda_A}{M_i}$, και εάν 'διαρέσουμε' τις αφίξεις και κρατήσουμε μόνο τα μηνύματα C_i , η διαδικασία άφιξης των C_i είναι *Poisson* με παράμετρο

$$\lambda_i = \frac{\lambda_A}{M_i} \cdot P(C_i).$$

Η συγχωνευμένη διαδικασία είναι *Poisson* με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{10}$. Επίσης, πρέπει να επιβάλουμε ότι συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα συμβάντα $C_i \in \mathcal{C}$, διαφορετικά ο δέκτης δεν λαμβάνει ποτέ ακριβώς 32 bit και ο απαιτούμενος χρόνος πηγαίνει στο άπειρο.

$$p_T(t) = \begin{cases} P(\mathcal{C}) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{10}) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{10})t}, & t \in [0, +\infty) \\ 1 - P(\mathcal{C}), & t = +\infty \end{cases}$$

$$\text{όπου } P(\mathcal{C}) = \sum_i P(C_i).$$

δ') Με δεδομένη μία άφιξη, η δεσμευμένη πιθανότητα ότι στάλθηκε από τον πομπό Α ή Β είναι

$$P(A|1 \text{ arrival}) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}, \\ P(B|1 \text{ arrival}) = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}.$$

Η πιθανότητα ότι ακριβώς οκτώ από τα επόμενα δώδεκα μηνύματα προέρχονται από τον πομπό Α είναι ίση με τη διωνυμική πιθανότητα,

$$\binom{12}{8} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^8 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^4.$$